

12 Stelling van Thales

CORRECTIESLEUTEL

Inhoud

– tot de stelling van Thales
 – de stelling van Thales en projectie
 – bewijs van de stelling van Thales
 5 Metrische betrekkingen in een rechthoekige driehoek
Signaal oefeningen
Differentiatietraject
Studiewijzer



WAT JE AL KUNT

- coördinaten van punten bepalen
- aanzichten van ruimtefiguren herkennen en tekenen
- lengtes en hoeken berekenen
- in congruente en gelijkvormige driehoeken overeenkomstige lengtes en hoeken herkennen en bepalen



WAT JE LEERT IN DEZE MODULE

- punten projecteren op een gegeven rechte volgens willekeurige richting
- stelling van Thales voor rechten formuleren en toepassen
- vraagstukken oplossen in het vlak en de ruimte



IN DE KIJKER

Je hebt aandacht voor het abstract redeneren.



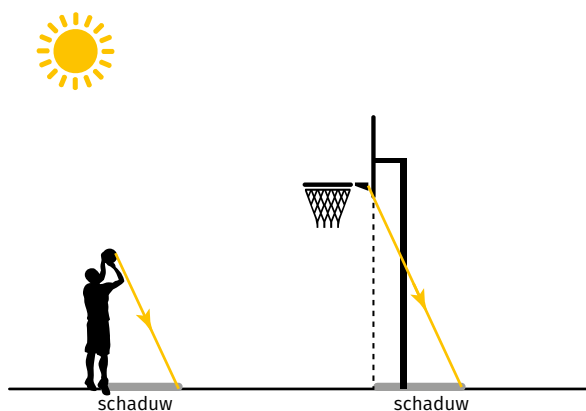
WISKUNDETAAL

- middenparallel
- evenwijdige of parallelle projectie
- loodrechte of orthogonale projectie
- projectieas
- projectierichting
- singleton
- stelling van Thales
- metrische betrekkingen



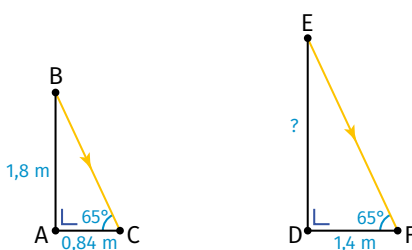
Opdracht 1

Op een zonnige zomerdag vraag je je tijdens een partijtje basketbal af hoe hoog de ring van de basketbalkorf is. Je kan de ring niet aanraken.



Aangezien de zon zeer ver van de aarde verwijderd is, mag je veronderstellen dat de zonnestrallen evenwijdig zijn. Je kan je eigen lengte, de lengte van jouw schaduw en de lengte van de schaduw van de basketbalring meten.

Als je kan bewijzen dat de gevormde driehoeken gelijkvormig zijn, dan kan je de hoogte van de ring van de basketbalkorf berekenen.



a) Bewijs dat $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ gelijkvormig zijn.

In $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{D} = 90^\circ \\ \hat{C} = \hat{F} = 65^\circ \end{array} \right\} \xRightarrow{HH} \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

b) Bepaal de hoogte van de basketbalring.

$$\begin{aligned} |DE| &= \frac{|DF| \cdot |AB|}{|AC|} \\ &= \frac{1,4 \cdot 1,8}{0,84} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Antwoord: De basketbalring hangt 3 m hoog.

Opdracht 2

Vul aan met behulp van de tekening als je weet dat $a \parallel b$.

- a) Binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn zijn supplementair.

$$\hat{A}_1 + \hat{B}_4 = 180^\circ$$

- b) Nevenhoeken zijn supplementair.

$$\hat{A}_3 + \hat{A}_2 = 180^\circ$$

- c) Verwisselende binnenhoeken zijn even groot.

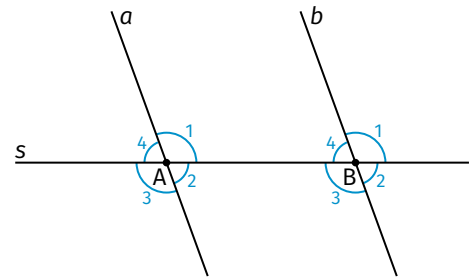
$$\hat{A}_1 = \hat{B}_3$$

- d) Overstaande hoeken zijn even groot.

$$\hat{B}_4 = \hat{B}_2$$

- e) Overeenkomstige hoeken zijn even groot.

$$\hat{A}_3 = \hat{B}_3$$



Opdracht 3

Vul aan.

- a) Wat is de verhouding van de omtrek van een cirkel tot het getal π ?

$$\frac{2r \cdot \pi}{\pi} = 2r = d$$

- b) Toon aan dat de verhouding van de oppervlakte van een cirkel tot π gelijk is aan één vierde van het kwadraat van de diameter van de cirkel.

$$\frac{A}{\pi} = \frac{d^2}{4}$$

$$\begin{aligned} \frac{A}{\pi} &= \frac{r^2 \cdot \pi}{\pi} \\ &= r^2 \\ &= \left(\frac{d}{2}\right)^2 \\ &= \frac{d^2}{4} \end{aligned}$$

TIP



$$A = \pi \cdot r^2$$

- c) Pas de hoofdeigenschap van evenredigheden toe.

$$\frac{A}{\pi} = \frac{d^2}{4}$$

$$4A = \pi d^2$$

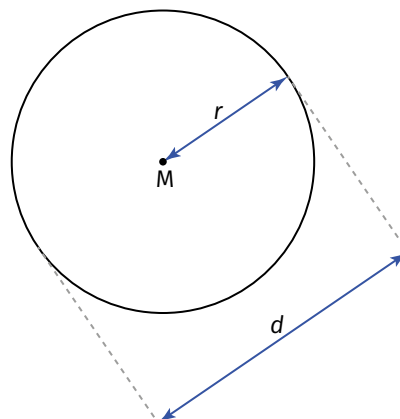
- d) Vul aan met behulp van de formule uit b en de tekening.

$$\pi = \frac{4A}{d^2}$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$d^2 = \frac{4A}{\pi}$$

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}}$$



1 Inleiding tot de stelling van Thales

1.1 Rechthoekige driehoeken met even grote scherpe hoeken

Beschouw de twee rechthoekige driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ uit de instapopdracht 1.

Gegeven: $\triangle ABC$ is rechthoekig in $\hat{A}$
 $\triangle DEF$ is rechthoekig in $\hat{D}$
 $BC \parallel EF$

Te bewijzen: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

Bewijs:

In $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{D} = 90^\circ \quad (\text{gegeven}) \\ \hat{C} = \hat{F} \quad (\text{overeenkomstige hoeken bij twee evenwijdigen en een snijlijn}) \end{array} \right\} \xRightarrow{HH}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|}$$

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|DF|}$$

stelling $\left| \begin{array}{l} \text{Twee rechthoekige driehoeken met één paar even grote scherpe hoeken zijn gelijkvormig.} \end{array} \right.$



Merk op

Verticale voorwerpen werpen een schaduw die evenredig is met de hoogte van dat voorwerp.

1.2 Driehoeken met een gemeenschappelijk hoekpunt en evenwijdige zijden

Een willekeurige $\triangle ABC$ wordt gesneden door de rechte DE en $DE \parallel BC$.

Te bewijzen: $\triangle ABC \sim \triangle AED$

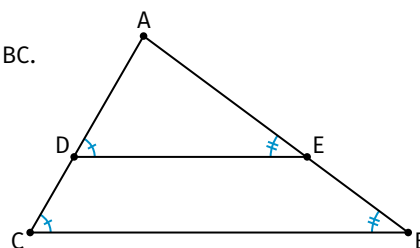
Bewijs:

In $\triangle ABC$ en $\triangle AED$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{C} = \hat{D} \quad (\text{overeenkomstige hoeken bij twee evenwijdigen en een snijlijn}) \\ \hat{B} = \hat{E} \quad (\text{overeenkomstige hoeken bij twee evenwijdigen en een snijlijn}) \end{array} \right\} \xRightarrow{HH}$$

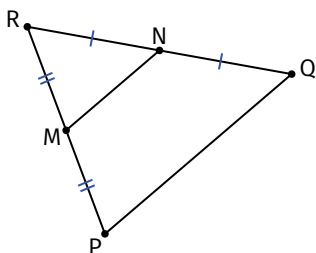
$$\triangle ABC \sim \triangle AED$$

$$\frac{|BC|}{|ED|} = \frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|AE|}$$



stelling $\left| \begin{array}{l} \text{Een rechte evenwijdig met een zijde van een driehoek bepaalt met de twee andere zijden een driehoek die gelijkvormig is met de gegeven driehoek.} \end{array} \right.$

Bijzonder geval



[MN] is een **middenparallel** van $\triangle PQR$. Een middenparallel van een driehoek is een lijnstuk dat de middens van twee zijden van een driehoek verbindt.

eigenschap Een middenparallel van een driehoek is evenwijdig met de derde zijde en half zo lang als de derde zijde.

Deze eigenschap zullen we later nog bewijzen.



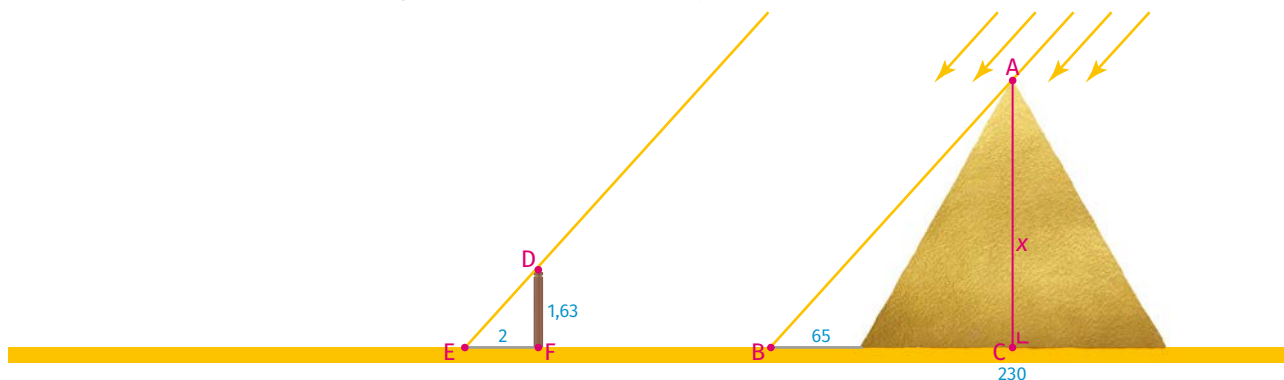
Verwerkingsopdrachten



1

Thales van Milete was een Griekse wijsgeer (624 v. Chr. - 545 v. Chr.). Er wordt verteld dat hij tijdens een reis naar Egypte de piramides bezocht en de hoogte van de piramide van Cheops wilde berekenen. Hij deed dit op de volgende manier:

- Hij bepaalde eerst de hoogte van een paal: 1,63 m.
- Daarna bepaalde hij de lengte van de schaduw van de paal: 2 m.
- Hij was in staat om de basis van de piramide te meten: 230 m.
- Tot slot mat hij de lengte van de schaduw van de piramide: 65 m.



Bepaal de hoogte van deze piramide.

In $\triangle DEF$ en $\triangle ABC$ geldt:

$$\hat{F} = \hat{C} = 90^\circ \quad (\text{gegeven})$$

$$\hat{E} = \hat{B}$$

(overeenkomstige hoeken bij twee evenwijdigen en een snijlijn)

$$\left. \begin{array}{l} \hat{F} = \hat{C} \\ \hat{E} = \hat{B} \end{array} \right\} \xRightarrow{HH} \triangle DEF \sim \triangle ABC$$

$$\frac{x}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|}$$

$$\frac{x}{1,63} = \frac{65 + 230}{2}$$

$$x = \frac{180 \cdot 1,63}{2}$$

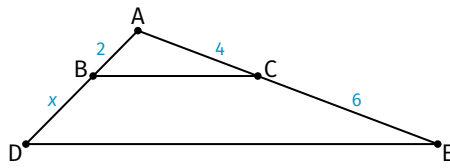
$$x = 146,7$$

Antwoord: De piramide is 146,7 m hoog.

2

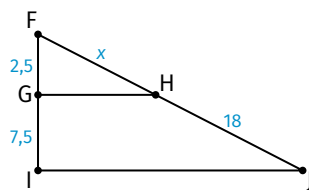
Bereken in elke driehoek de onbekende lengte x met behulp van gelijkvormige driehoeken.

a) $BC \parallel DE$



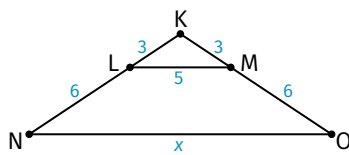
$$\begin{aligned}\frac{|AB|}{|AD|} &= \frac{|AC|}{|AE|} \\ \frac{2}{x+2} &= \frac{4}{10} \\ \frac{20}{4} &= x+2 \\ 5-2 &= x \\ 3 &= x\end{aligned}$$

b) $GH \parallel IJ$



$$\begin{aligned}\frac{|FG|}{|FI|} &= \frac{|FH|}{|FJ|} \\ \frac{2,5}{10} &= \frac{x}{x+18} \\ 2,5(x+18) &= 10x \\ 45 &= 10x - 2,5x \\ 45 &= 7,5x \\ 6 &= x\end{aligned}$$

c) $LM \parallel NO$



$$\begin{aligned}\frac{|NO|}{|LM|} &= \frac{|KN|}{|KL|} \\ \frac{x}{5} &= \frac{9}{3} \\ x &= \frac{9 \cdot 5}{3} \\ x &= 15\end{aligned}$$

2 Projectie

In het tweede jaar bestudeerde je al enkele meetkundige transformaties: spiegelingen, verschuivingen en rotaties. In dit punt bestuderen we een nieuwe transformatie: de **projectie**.

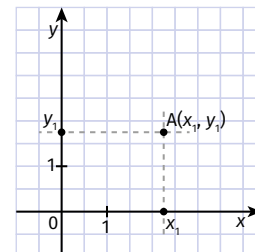
2.1 Loodrechte projectie

In een cartesiaans assenstelsel kan je punten voorstellen met coördinaten.

Het eerste coördinaatgetal lees je af op de x-as en het tweede coördinaatgetal op de y-as.

Om coördinaatgetallen te bepalen maak je gebruik van loodrechte projectie.

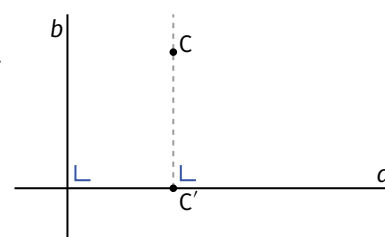
- Om het eerste coördinaatgetal van A te bepalen, projecteren we het punt A op de rechte x volgens de richting van y.
- Om het tweede coördinaatgetal van A te bepalen, projecteren we het punt A op de rechte y volgens de richting van x.



De rechte waarop men een punt projecteert (rechte a), noemt men de **projectieas**.

De rechte b bepaalt de **projectierichting**.

Als de projectierichting loodrecht staat op de projectieas, dan spreekt men over **loodrechte projectie**.



notatie $p_a(C) = C'$

Dit lees je als: 'C' is het **projectiebeeld** van de loodrechte projectie van het punt C op de rechte a'.



— Merk op —

- Een loodrechte projectie wordt ook wel een **orthogonale projectie** genoemd.
- De loodrechte projectie wordt vaak gebruikt bij technische tekeningen (bovenaanzicht - vooraanzicht - zijaanzicht).

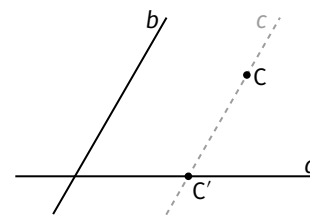
2.2 Projectie van een punt

We projecteren het punt C op de rechte a volgens de richting van b. De rechten a en b zijn snijdend.

Hoe teken je het projectiebeeld van C op de rechte a?

- methode
- STAP 1: Teken een rechte c evenwijdig aan de rechte b en door het punt C.
 - STAP 2: Bepaal het snijpunt C' van de rechte c met de rechte a.

notatie $p_a^b(C) = C'$

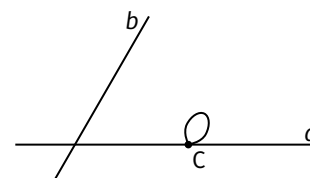


Dit lees je als: 'C' is het **projectiebeeld** van het punt C op de rechte a volgens de richting van b'.



— Merk op —

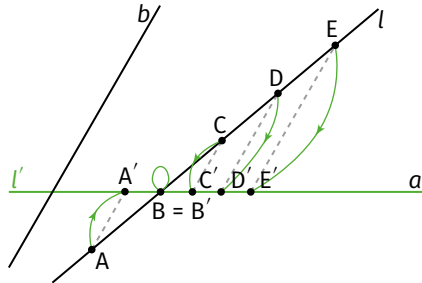
- Als je van meerdere punten het projectiebeeld moet bepalen, moet je telkens een evenwijdige rechte aan de projectierichting tekenen. Daarom noemt deze constructie vaak **evenwijdige/parallele projectie**.
- Als punt C tot de projectieas a behoort, dan is het projectiebeeld het punt C zelf:
Als $C \in a$ dan $p_a^b(C) = C$.



2.3 Projectie van een rechte

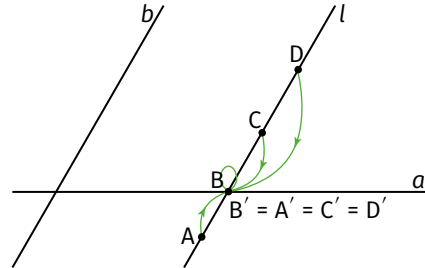
A) De rechte l is niet evenwijdig met de projectierichting

Het beeld van de rechte l na projectie is opnieuw een rechte.



B) De rechte l is evenwijdig met de projectierichting

Het beeld van elk punt van de rechte l na projectie is het snijpunt B.



notatie $p_a^b(l) = l' = a$

l' valt samen met de projectieas a .

notatie $p_a^b(l) = \{B\}$



— Merk op —

Bij het bepalen van het projectiebeeld van de rechte volstaat het om het projectiebeeld van twee punten van die rechte te bepalen. Een rechte wordt bepaald door twee punten.

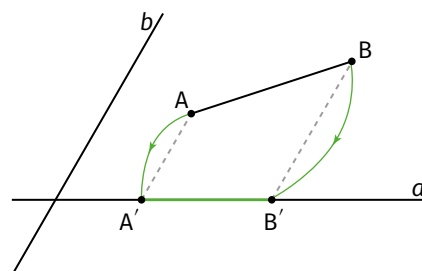
Een verzameling die slechts één element bevat, noemt men een **singleton**.

2.4 Projectie van een lijnstuk

Bij een lijnstuk volstaat het om het begin- en eindpunt van het lijnstuk te projecteren.

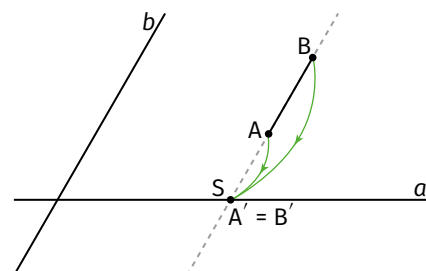
A) De drager van lijnstuk $[AB]$ is niet evenwijdig met de projectierichting

Het beeld van het lijnstuk $[AB]$ na projectie is opnieuw een lijnstuk.



B) De drager van lijnstuk $[AB]$ is evenwijdig met de projectierichting

Het beeld van elk punt van $[AB]$ na projectie is het snijpunt S van AB met de projectieas a .



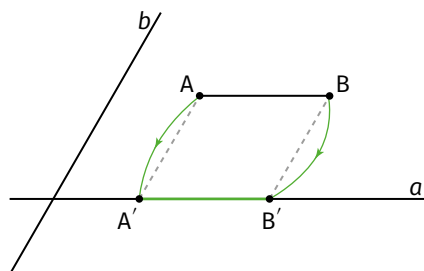
notatie $p_a^b([AB]) = [A'B']$

notatie $p_a^b([AB]) = \{S\}$

2.5 Projectie en lengte

A) De drager van het lijnstuk is evenwijdig met de projectieas

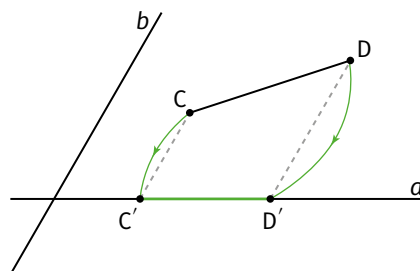
$$p_a^b([AB]) = [A'B']$$



Vaststelling:
 $|A'B'| = |AB|$

B) De drager van het lijnstuk is niet evenwijdig met de projectieas

$$p_a^b([CD]) = [C'D']$$



$$|C'D'| \neq |CD|$$

We besluiten dat een projectie niet altijd de lengte van het lijnstuk bewaart.



— Merk op —

Vierhoek $ABB'A'$ is een parallellogram want we kunnen aantonen dat beide paren overstaande zijden evenwijdig zijn:

- $\left. \begin{array}{l} AB \parallel a \text{ (gegeven)} \\ a = A'B' \text{ (projectiebeelden liggen altijd op de projectieas)} \end{array} \right\} \Rightarrow AB \parallel A'B'$
- $\left. \begin{array}{l} AA' \parallel b \text{ (stappenplan projectie van een punt)} \\ BB' \parallel b \text{ (stappenplan projectie van een punt)} \end{array} \right\} \Rightarrow AA' \parallel BB'$

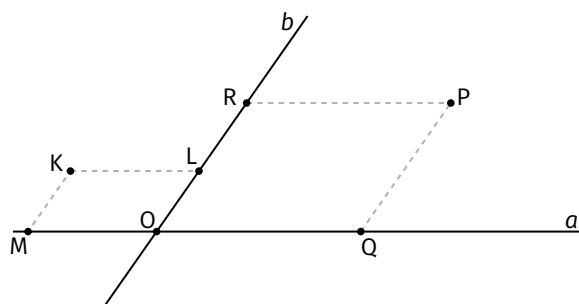


Verwerkingsopdracht



3, 4, 5

3



Vul aan.

$p_a^b(P) =$	Q	$p_b^a(R) =$	R
$p_b^a(P) =$	R	$p_a^b([KP]) =$	[MQ]
$p_a^b(K) =$	M	$p_b^a([KP]) =$	[LR]
$p_b^a(K) =$	L	$p_a^b(RQ) =$	a
$p_a^b(R) =$	O	$p_b^a(KL) =$	{L}

3 De stelling van Thales en projectie

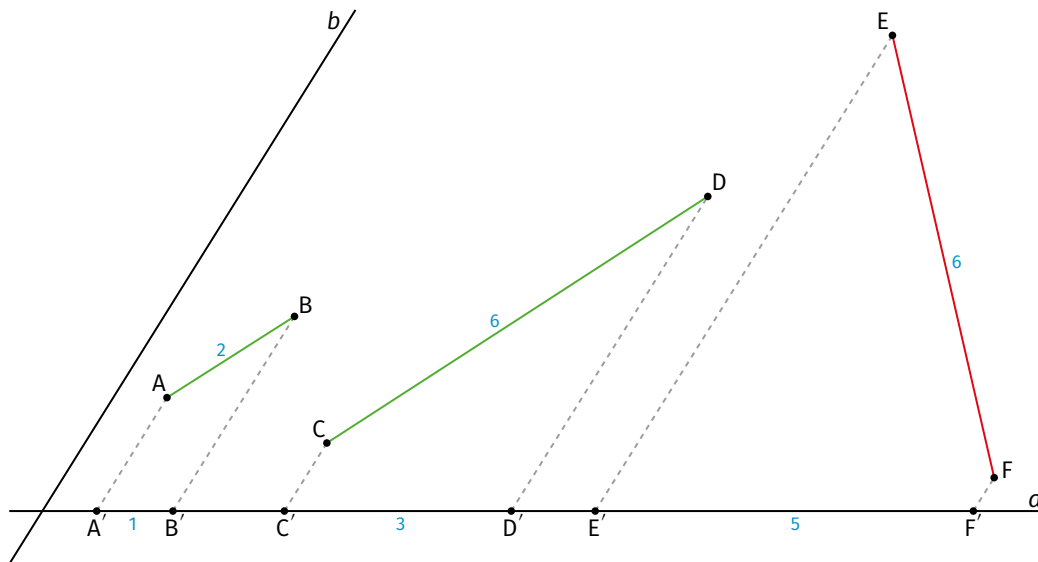
3.1 De stelling van Thales

Hieronder werden drie lijnstukken getekend: $[AB]$, $[CD]$ en $[EF]$.

We projecteren de drie lijnstukken: $p_a^b([AB]) = [A'B']$

$$p_a^b([CD]) = [C'D']$$

$$p_a^b([EF]) = [E'F']$$



Vaststelling:

Evenwijdige lijnstukken

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A'B'|}{|C'D'|}$$

Niet evenwijdige lijnstukken

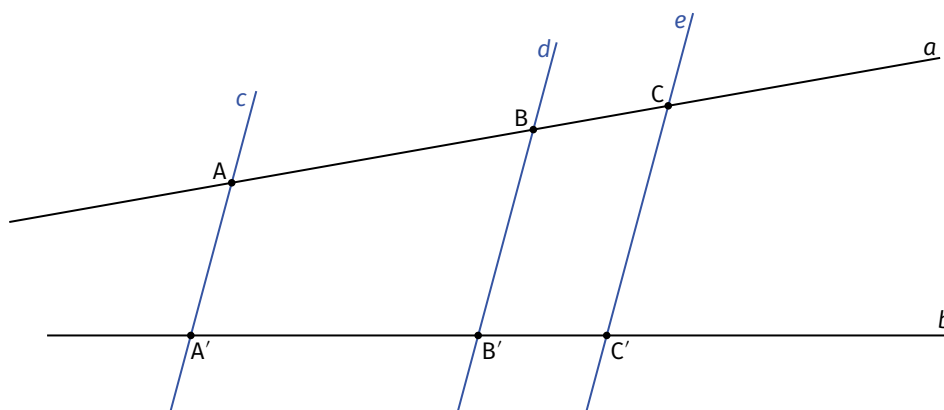
$$\frac{|AB|}{|EF|} \neq \frac{|A'B'|}{|E'F'|}$$

We formuleren dit in de **stelling van Thales**:

stelling Een evenwijdige projectie bewaart de verhouding van lengtes van evenwijdige lijnstukken.

Voorbeeld

$c \parallel d \parallel e$



$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$$

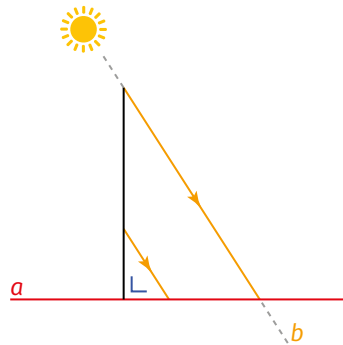
De evenwijdige rechten geven de projectierichting weer.

De evenwijdige rechten snijden op twee snijdende rechten evenredige lijnstukken af.

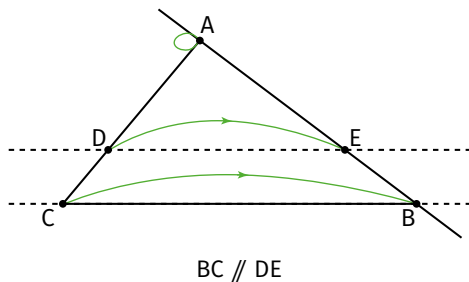
3.2 Vraagstukken oplossen met de stelling van Thales

We kunnen vraagstukken oplossen door te steunen op projecties.

De stelling van Thales laat toe om snel onbekende lengtes van lijnstukken te bepalen.



De schaduwvorming van verticale voorwerpen op de grond kunnen we beschouwen als de projectie van deze voorwerpen volgens de richting van de zonnestrallen (= **projectierichting**) op het aardoppervlak (= **projectieas**).



Hier herken je de volgende projecties:

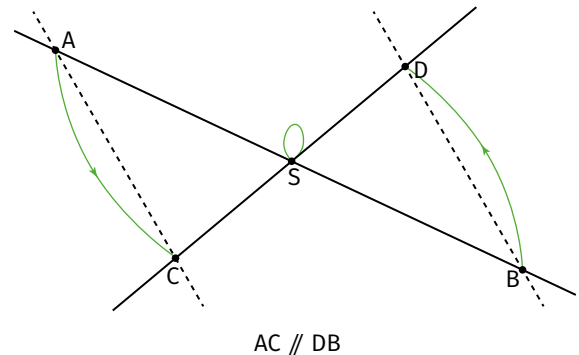
$$p_{AB}^{BC}(C) = B$$

$$p_{AB}^{BC}(D) = E$$

$$p_{AB}^{BC}(A) = A$$

Uit de stelling van Thales volgt:

$$\frac{|AD|}{|AE|} = \frac{|AC|}{|AB|}$$



Hier herken je de volgende projecties:

$$p_{CD}^{AC}(A) = C$$

$$p_{CD}^{AC}(B) = D$$

$$p_{CD}^{AC}(S) = S$$

Uit de stelling van Thales volgt:

$$\frac{|AS|}{|CS|} = \frac{|SB|}{|SD|}$$

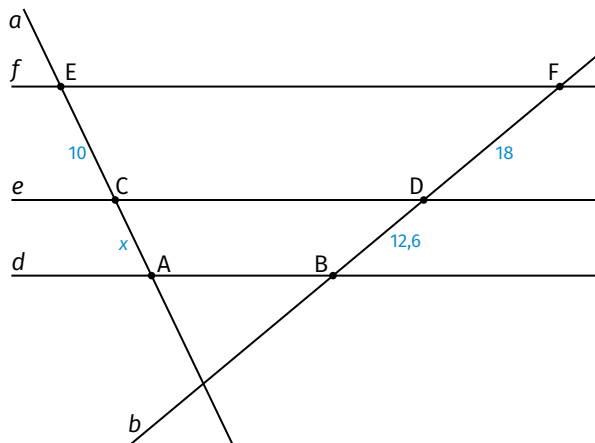


— Merk op —

- Je kan ook projecteren op een andere projectieas.
- De gevormde driehoeken zijn altijd gelijkvormig.

Voorbeeld

We zoeken de onbekende lengte $|AC|$.



We projecteren de lijnstukken $[EC]$ en $[CA]$ op de rechte b volgens de evenwijdige horizontale rechten d , e en f .

Uit de stelling van Thales volgt:

$$\frac{|EC|}{|FD|} = \frac{|CA|}{|DB|}$$

$$\frac{10}{18} = \frac{x}{12,6}$$

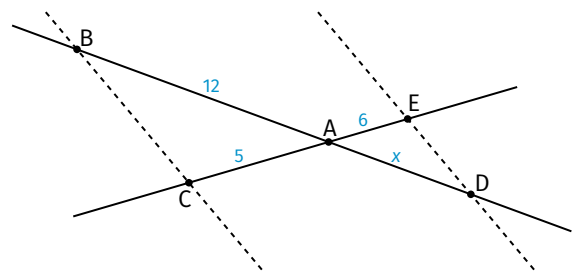
$$\frac{5}{9} = \frac{x}{12,6}$$

$$\frac{5 \cdot 12,6}{9} = x$$

$$7 = x$$

Antwoord: De lengte van het lijnstuk $[CA]$ is 7.

We zoeken de onbekende lengte $|AD|$.



We projecteren de lijnstukken $[BA]$ en $[AD]$ op de rechte CE volgens de richting BC .

Uit de stelling van Thales volgt:

$$\frac{|BA|}{|CA|} = \frac{|AD|}{|AE|}$$

$$\frac{12}{5} = \frac{x}{6}$$

$$\frac{12 \cdot 6}{5} = x$$

$$14,4 = x$$

Antwoord: De lengte van het lijnstuk $[AD]$ is 14,4.



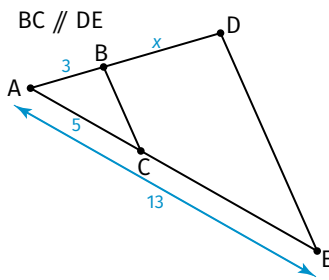
Verwerkingsopdrachten



6, 7, 8

4

Formuleer de stelling van Thales in symbolen. Bereken de onbekende lengte $|BD|$.



$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CE|} \quad \text{wordt:} \quad \frac{3}{5} = \frac{x}{13 - 5}$$

$$\frac{3 \cdot 8}{5} = x$$

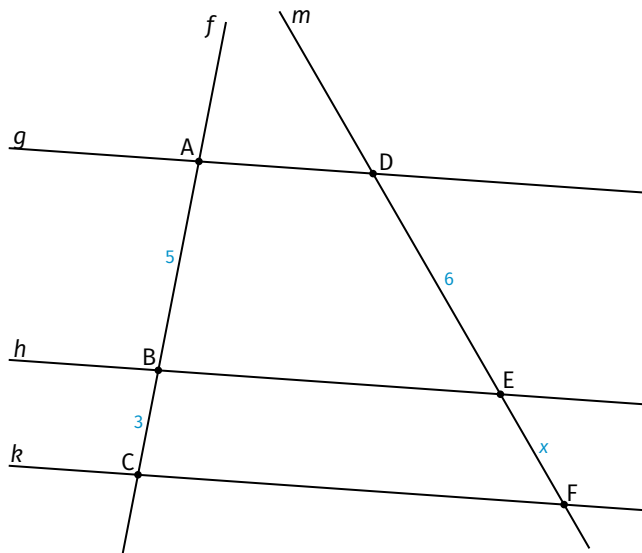
$$\frac{24}{5} = x$$

$$4,8 = x$$

5

Bepaal telkens de onbekende lengte x .

a) $g \parallel h \parallel k$



$$\frac{|EF|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|AB|}$$

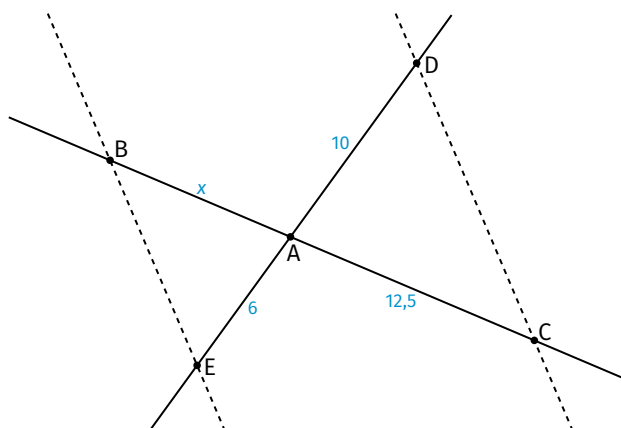
$$\frac{x}{3} = \frac{6}{5}$$

$$x = \frac{6 \cdot 3}{5}$$

$$x = \frac{18}{5}$$

$$x = 3,6$$

b) $BE \parallel CD$



$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|AC|}{|AD|}$$

$$\frac{x}{6} = \frac{12,5}{10}$$

$$x = \frac{12,5 \cdot 6}{10}$$

$$x = \frac{75}{10}$$

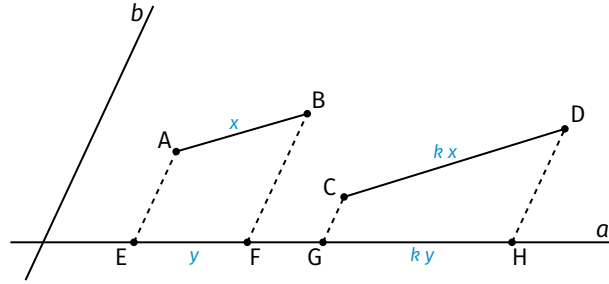
$$x = 7,5$$



4 Bewijs van de stelling van Thales

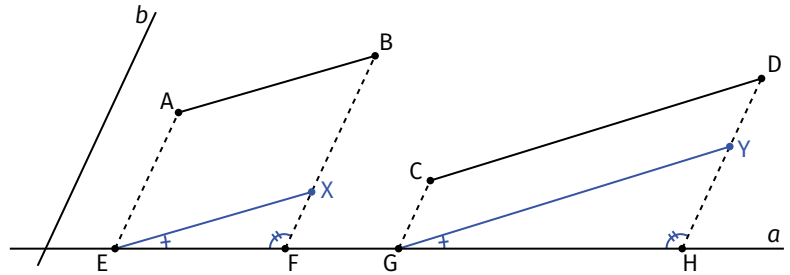
Gegeven: $AB \parallel CD$
 $\frac{|CD|}{|AB|} = k$
 $p_a^b([AB]) = [EF]$
 $p_a^b([CD]) = [GH]$

Te bewijzen: $\frac{|GH|}{|EF|} = k$



Bewijs:

- We maken een hulpconstructie:
 Teken een rechte evenwijdig met AB door het punt E. Noem het snijpunt met BF het punt X.
 Teken een rechte evenwijdig met CD door het punt G. Noem het snijpunt met HD het punt Y.



- Uit deze constructie volgt:

Vierhoek ABXE is een parallellogram

(de twee paar overstaande zijden zijn evenwijdig)

Vierhoek CDYG is een parallellogram

(de twee paar overstaande zijden zijn evenwijdig)

We kunnen besluiten:

$$|AB| = |EX| \text{ en } |CD| = |GY| \quad (1)$$

- $EX \parallel GY$ want $EX \parallel AB$ (hulpconstructie)
 $AB \parallel CD$ (gegeven)
 $CD \parallel GY$ (hulpconstructie)

- We tonen aan dat $\triangle EXF \sim \triangle GYH$.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{E} = \hat{G} \text{ (overeenkomstige hoeken bij } EX \parallel GY \text{ en snijlijn } a) \\ \hat{F} = \hat{H} \text{ (overeenkomstige hoeken bij } FX \parallel HY \text{ en snijlijn } a) \end{array} \right\} \xRightarrow{HH} \triangle EXF \sim \triangle GYH$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{|GY|}{|EX|} = \frac{|GH|}{|EF|} = \frac{|YH|}{|XF|} \quad (2)$$

- Uit (1) en (2):

$$\frac{|GY|}{|EX|} = \frac{|CD|}{|AB|} \quad (1)$$

$$\Downarrow \quad (gegeven)$$

$$\frac{|GY|}{|EX|} = k$$

$$\Downarrow \quad (2)$$

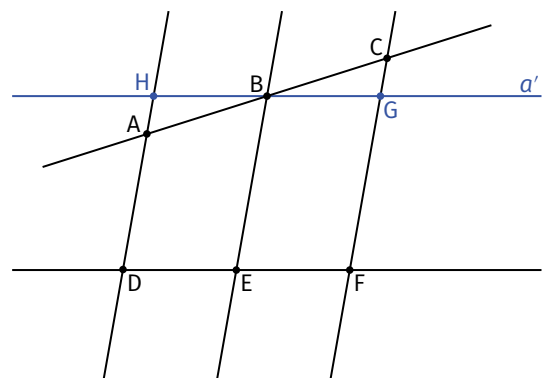
$$\frac{|GH|}{|EF|} = k$$



— **Merk op** —

Ook in deze situatie kun je met gelijkvormige driehoeken de stelling van Thales bewijzen.

$a' \parallel DF$ (hulpconstructie)





Verwerkingsopdrachten



6

Gegeven: $|AB| = |BC|$
 $BF \parallel CG$

Gevraagd:

a) Wat kan je besluiten over $|AD|$ en $|DE|$?

$$|AD| = |DE|$$

b) Dit kan je aantonen met de stelling van Thales.
Vul aan.

We projecteren de lijnstukken $[AB]$ en $[BC]$
op de rechte AE volgens de richting CE .

De stelling van Thales stelt dat

een projectie de verhouding van lengtes van evenwijdige
lijnstukken bewaart.

Aangezien $[AB]$ en $[BC]$ even lang zijn, zijn ook hun projectiebeelden even lang.

c) Wat kan je besluiten over $|AF|$ en $|FG|$?

$$|AF| = |FG|$$

d) Toon dit aan met de stelling van Thales. Wees volledig.

$$BF \parallel CG$$

$\Downarrow$ (Thales)

$$\frac{|AB|}{|AF|} = \frac{|BC|}{|FG|}$$

$\Downarrow$ (middelste termen wisselen van plaats)

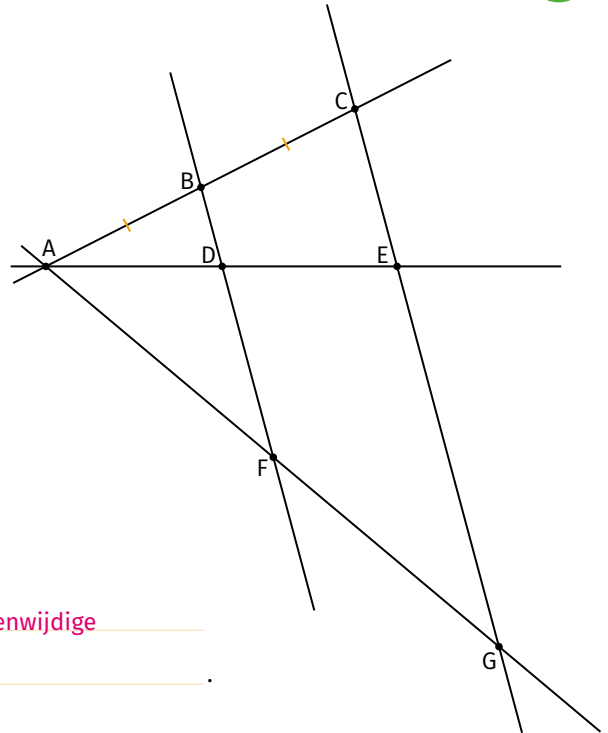
$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AF|}{|FG|}$$

$\Downarrow$

$$1 = \frac{|AF|}{|FG|}$$

$\Downarrow$

$$|FG| = |AF|$$



7

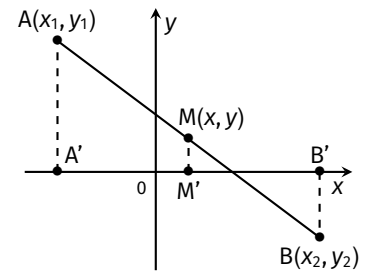
Je leerde al dat je analytisch de coördinaat van het midden van een lijnstuk kunt bepalen. Bouw stap voor stap de redenering op met de volgende informatie:

$A(x_1, y_1)$ en $B(x_2, y_2)$

AB snijdt zowel de x-as als de y-as.

M is het midden van [AB] met $M(x, y)$.

$p_x^y(A) = A'$, $p_x^y(B) = B'$, $p_x^y(M) = M'$



- a) Noteer voor de gekleurde implicatie en equivalenties een correcte wiskundige verklaring in de vakjes.

M is het midden van [AB].



definitie van het midden van een lijnstuk

$$|MA| = |MB|$$



$$\frac{|MA|}{|MB|} = 1$$



stelling van Thales

$$\frac{|M'A'|}{|M'B'|} = 1$$



$$|M'A'| = |M'B'|$$



$co(A') = (x_1, 0)$, $co(B') = (x_2, 0)$, $co(M') = (x, 0)$

$$|x - x_1| = |x - x_2|$$



definitie absolute waarde: $|x| = x \vee -x$

$$x - x_1 = x_2 - x \vee x - x_1 = x - x_2$$



$$2x = x_1 + x_2 \vee x_1 = x_2$$

Waarom valt de tweede oplossing weg?



Als $x_1 = x_2$, dan is [AB] evenwijdig of samenvallend met de y-as.
Dat is strijdig met het gegeven dat [AB] de x- en y-as snijdt.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

b) Noteer nu zelf de afleiding voor het tweede coördinaatgetal.

M is het midden van [AB].

⇓ definitie van het midden van een lijnstuk

$$|MA| = |MB|$$

⇕

$$\frac{|MA|}{|MB|} = 1$$

⇕ $p_y^x(A) = A''$, $p_y^x(B) = B''$, $p_y^x(M) = M''$
en stelling van Thales

$$\frac{|M''A''|}{|M''B''|} = 1$$

⇕

$$|M''A''| = |M''B''|$$

⇕ $\text{co}(A'') = (0, y_1)$, $\text{co}(B'') = (0, y_2)$, $\text{co}(M'') = (0, y)$

$$|y - y_1| = |y - y_2|$$

⇕ definitie absolute waarde: $|x| = x \vee -x$

$$y - y_1 = y_2 - y \vee y - y_1 = y - y_2$$

⇕

$$2y = y_1 + y_2 \vee y_1 = y_2$$

Als $y_1 = y_2$, dan is [AB] evenwijdig of
samenvallend met de x-as. Dat is strijdig met
het gegeven dat [AB] de x-as en y-as snijdt.

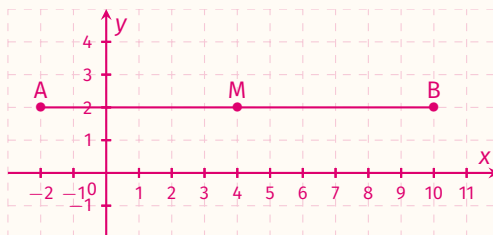
$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

c) Welke redenering kun je maken als AB evenwijdig is met de x-as? Maak ook een passende tekening (en analoog voor mocht AB evenwijdig zijn met de y-as).

Als AB evenwijdig is met de x-as, geldt:

$$\text{co}(A) = (x_1, p), \text{co}(B) = (x_2, p), \text{co}(M) = (x, p)$$

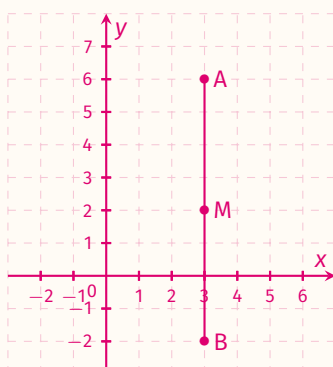
$$\text{Daaruit volgt, analoog aan de oplossing van vraag a): } \text{co}(M) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, p \right)$$



Als AB evenwijdig is met de y-as, geldt:

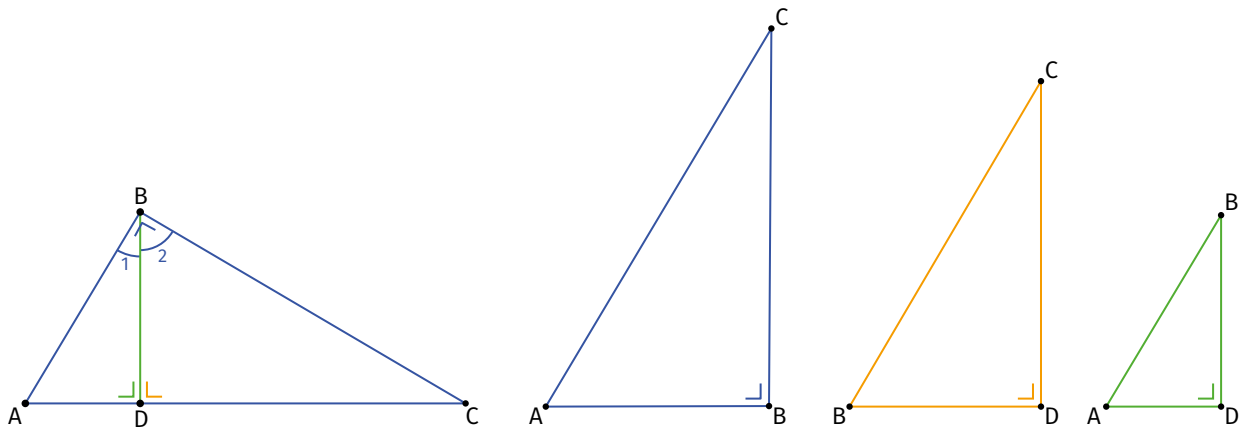
$$\text{co}(A) = (q, y_1), \text{co}(B) = (q, y_2), \text{co}(M) = (q, y)$$

$$\text{Daaruit volgt, analoog aan de oplossing van vraag b): } \text{co}(M) = \left(q, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$



5 Metrische betrekkingen in een rechthoekige driehoek

Gegeven: $\triangle ABC$ is rechthoekig in B.
[BD] is de hoogtelijn uit B.



We stellen vast: $\triangle ABC \sim \triangle ADB \sim \triangle BDC$ want:

In $\triangle ABC$ en $\triangle ADB$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{D} \text{ (rechte hoeken)} \\ \hat{A} = \hat{A} \text{ (gemeenschappelijke hoeken)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADB$$

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|AB|}$$

$$|AB|^2 = |AC| \cdot |AD|$$

In $\triangle ABC$ en $\triangle BDC$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{D} \text{ (rechte hoeken)} \\ \hat{C} = \hat{C} \text{ (gemeenschappelijke hoeken)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle BDC$$

$$\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|BC|}{|DC|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

$$|BC|^2 = |AC| \cdot |DC|$$

In $\triangle ADB$ en $\triangle BDC$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{D} = \hat{D} \text{ (rechte hoeken)} \\ \hat{A} = \hat{B}_2 \text{ (} \hat{A} + \hat{B}_1 = 90^\circ = \hat{B}_2 + \hat{B}_1 \text{)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADB \sim \triangle BDC$$

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|BC|}$$

$$|BD|^2 = |AD| \cdot |DC|$$

eigen-
schappen

IN WOORDEN

In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de lengte van een rechthoekszijde gelijk aan het product van de lengte van de schuine zijde en de lengte van de loodrechte projectie van deze rechthoekszijde op de schuine zijde.

IN SYMBOLEN

$$|AB|^2 = |AC| \cdot |AD|$$

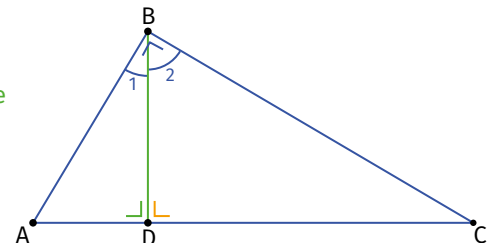
$$|BC|^2 = |AC| \cdot |DC|$$

IN WOORDEN

In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de lengte van de hoogtelijn op de schuine zijde gelijk aan het product van de lengte van de loodrechte projecties van de rechthoekszijden op de schuine zijde.

IN SYMBOLEN

$$|BD|^2 = |AD| \cdot |DC|$$

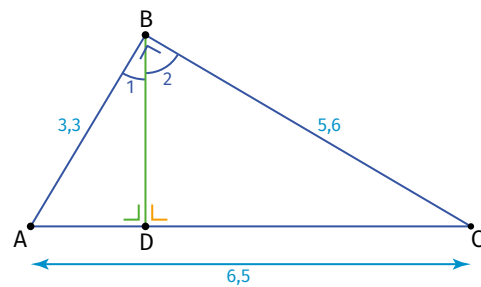


Deze eigenschappen noemen we de **metrische betrekkingen** in een rechthoekige driehoek.

Voorbeeld

Bepaal $|AD|$, $|DC|$ en $|BD|$.

$$\begin{array}{l|l} |AB|^2 = |AC| \cdot |AD| & |BC|^2 = |AC| \cdot |DC| \\ 3,3^2 = 6,5 \cdot |AD| & 5,6^2 = 6,5 \cdot |DC| \\ |AD| = \frac{3,3^2}{6,5} & |DC| = \frac{5,6^2}{6,5} \\ |AD| = \frac{10,89}{6,5} & |DC| = \frac{31,36}{6,5} \\ |AD| \approx 1,68 & |DC| \approx 4,82 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} |BD|^2 = |AD| \cdot |DC| \\ |BD|^2 = \frac{10,89}{6,5} \cdot \frac{31,36}{6,5} \quad \leftarrow \text{we kiezen er voor om de exacte waarden in te vullen} \\ |BD| = \sqrt{\frac{10,89}{6,5} \cdot \frac{31,36}{6,5}} \quad \leftarrow \text{neem de positieve vierkantswortel want een afstand is positief} \\ |BD| \approx 2,84 \end{array}$$



— Merk op —

- $|AD| + |DC| = |AC|$

$$\text{Controle: } \frac{10,89}{6,5} + \frac{31,36}{6,5} = \frac{42,25}{6,5} = 6,5$$

- Je kunt de hoogte in deze situatie ook anders bepalen door gebruik te maken van de oppervlakte van een driehoek:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{|AB| \cdot |BC|}{2} = \frac{|AC| \cdot |BD|}{2}$$

$$|BD| = \frac{|AB| \cdot |BC|}{|AC|} = \frac{3,3 \cdot 5,6}{6,5}$$

$$|BD| \approx 2,84$$

- In een vraagstuk kun je de lengte afronden op de gevraagde nauwkeurigheid.

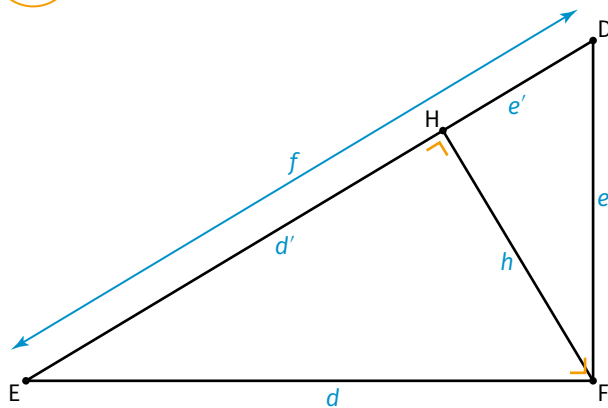


Verwerkingsopdrachten



8

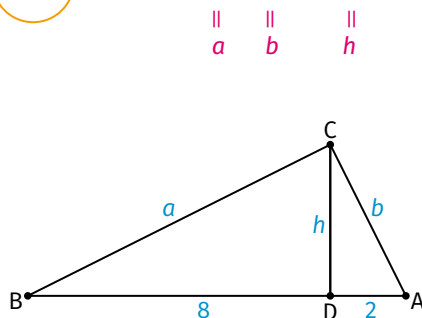
Noteer de metrische betrekkingen in onderstaande driehoek.



- $e^2 = f \cdot e'$
- $d^2 = f \cdot d'$
- $h^2 = e' \cdot d'$

9

Bereken $|BC|$, $|AC|$ en $|CD|$.



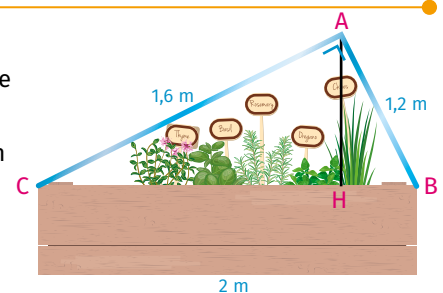
- $a^2 = 10 \cdot 8$
 $a^2 = 80$
 $a = \sqrt{80}$
 $a = 4\sqrt{5}$
- $b^2 = 10 \cdot 2$
 $b^2 = 20$
 $b = \sqrt{20}$
 $b = 2\sqrt{5}$
- $h^2 = 2 \cdot 8$
 $h^2 = 16$
 $h = \sqrt{16}$
 $h = 4$

10

Jente heeft een moestuinbak. Zijn papa maakte een glazen constructie om op de bak te plaatsen.

Hoe hoog bevindt het hoogste punt van de glazen constructie zich ten opzichte van de bovenrand van de moestuinbak?

Rond je resultaat af op 1 mm nauwkeurig.



- $1,6^2 = 2 \cdot |HC|$
 $\frac{1,6^2}{2} = |HC|$
 $1,28 = |HC|$
- $1,2^2 = 2 \cdot |HB|$
 $\frac{1,2^2}{2} = |HB|$
 $0,72 = |HB|$
- $|AH|^2 = 1,28 \cdot 0,72$
 $|AH|^2 = 0,9216$
 $|AH| = \sqrt{0,9216}$
 $|AH| = 0,960$

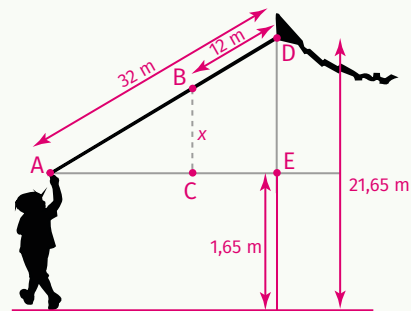
Antwoord: Het hoogste punt bevindt zich op 960 mm van de bak.



Signaal oefeningen

1

Lou speelt met een vlieger op het strand. Als het touw 32 m lang is, dan bevindt de vlieger zich op een hoogte van 21,65 m. Hij haalt het touw aan, waardoor de lengte van het touw vermindert met 12 m. Je mag veronderstellen dat de hoek die het touw maakt met de horizontale constant blijft. Bereken de hoogte van de vlieger nadat Lou het touw heeft aangehaald als je weet dat Lou 1,65 m groot is.



In $\triangle ABC$ en $\triangle ADE$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A} \text{ (gemeenschappelijke hoek)} \\ \hat{C} = \hat{E} \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE$$

$$\begin{aligned} \frac{|AB|}{|AD|} &= \frac{|BC|}{|DE|} \\ \frac{32 - 12}{32} &= \frac{x}{21,65 - 1,65} \\ \frac{20 \cdot 20}{32} &= x \\ 12,5 &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h &= 1,65 + x \\ &= 1,65 + 12,5 \\ &= 14,15 \end{aligned}$$

Antwoord: De vlieger is dan op een hoogte van 14,15 m.

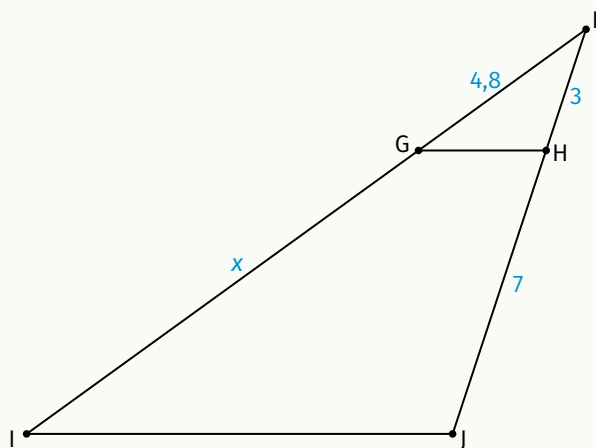
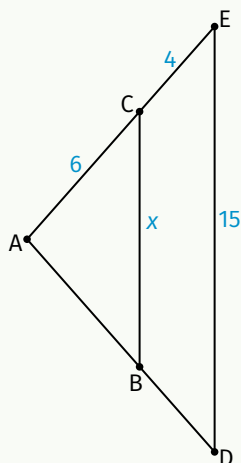
>>> Verder oefenen: D1 t.e.m. D17

2

Bereken in elke driehoek de onbekende lengte x.

a) $BC \parallel DE$

b) $GH \parallel IJ$



$$\begin{aligned} \frac{|BC|}{|DE|} &= \frac{|AC|}{|AE|} \\ \frac{x}{15} &= \frac{6}{10} \\ x &= \frac{6 \cdot 15}{10} \\ x &= 9 \end{aligned}$$

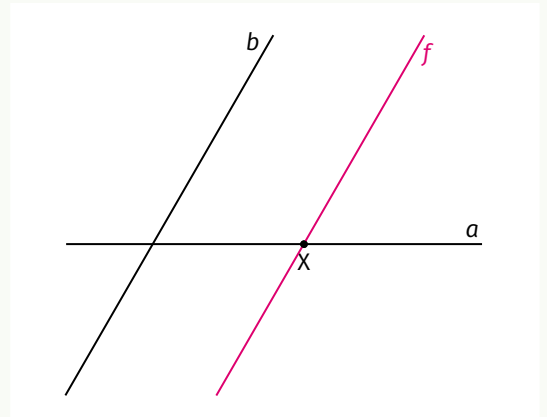
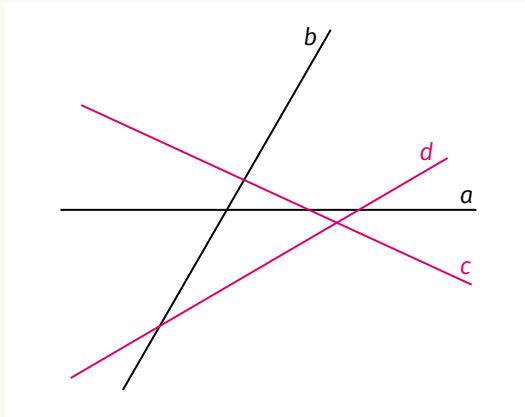
$$\begin{aligned} \frac{|FG|}{|GI|} &= \frac{|FH|}{|HJ|} \\ \frac{4,8}{x} &= \frac{3}{7} \\ \frac{4,8 \cdot 7}{3} &= x \\ 11,2 &= x \end{aligned}$$

>>> Verder oefenen: D1 t.e.m. D17

3

a) Teken twee verschillende rechten c en d zodat $p_a^b(c) = p_a^b(d) = a$.

b) Teken een rechte f zodat $p_a^b(f) = \{X\}$.



>>> Verder oefenen: D18 t.e.m. D34

4

Gegeven: $a \parallel c$ en $b \parallel d$

Vul aan.

• ABCD is een **parallellogram**

a) $p_a^b(A) = \mathbf{D}$

e) $p_c^d(C) = \mathbf{B}$

b) $p_a^d(B) = \mathbf{C}$

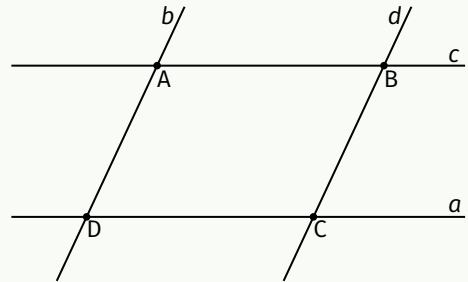
f) $p_d^a(D) = \mathbf{C}$

c) $p_b^c(C) = \mathbf{D}$

g) $p_b^c(B) = \mathbf{A}$

d) $p_c^d(D) = \mathbf{A}$

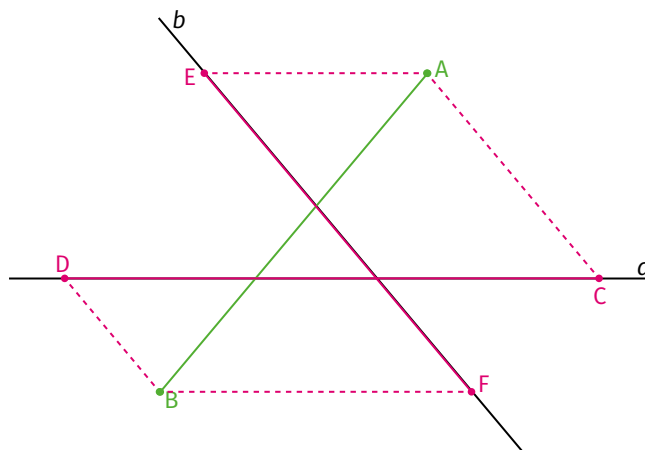
h) $p_d^c(A) = \mathbf{B}$



>>> Verder oefenen: D18 t.e.m. D34

5

Teken $[CD]$ en $[EF]$ als $p_a^b([AB]) = [CD]$ en $p_b^a([AB]) = [EF]$.



>>> Verder oefenen: D18 t.e.m. D34

6

Op twee rechten die elkaar snijden in C kiest men A, B, D, E, F en G zodat $AB \parallel DE \parallel FG$.
Verder is $|AC| = 3$; $|BC| = 2$; $|CE| = 4$ en $|CG| = 10$. Bepaal $|EF|$.

© JWO 2008-2009 eerste ronde

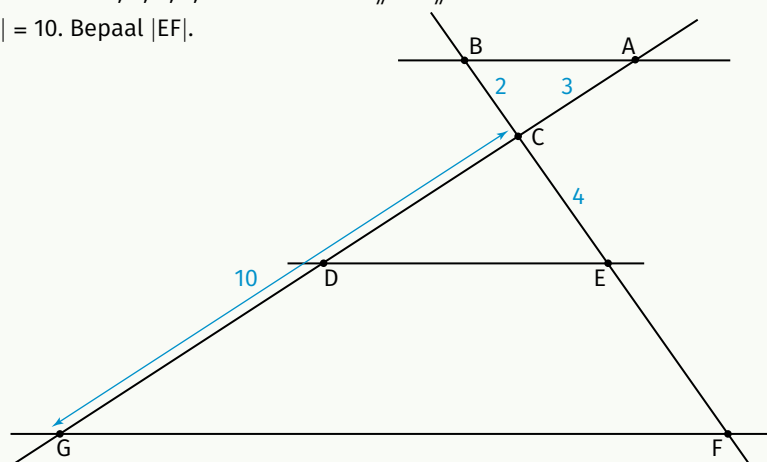
$$\frac{|CD|}{4} = \frac{3}{2}$$

$$|CD| = 6$$

$$\frac{|EF|}{4} = \frac{4}{6}$$

$$|EF| = \frac{16}{6}$$

$$|EF| = \frac{8}{3}$$



>>> Verder oefenen: D35 t.e.m. D53

7

Op de volgende tekening is $a \parallel c \parallel d$. Zijn de gegeven verhoudingen gelijk of niet?
Vul in. Kies uit = of $\neq$.

a) $\frac{|EG|}{|FH|} = \frac{|AE|}{|BF|}$

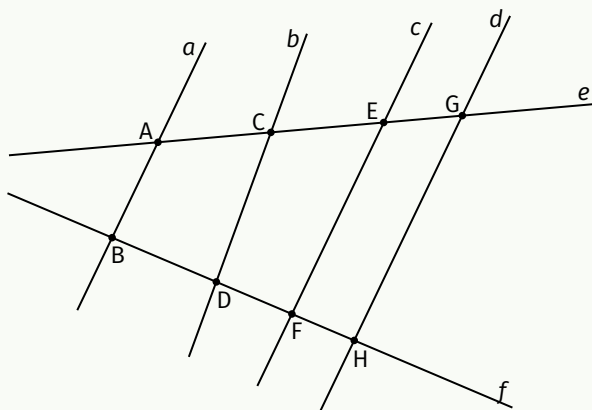
b) $\frac{|AC|}{|BD|} \neq \frac{|AE|}{|BF|}$

c) $\frac{|AE|}{|BF|} = \frac{|AG|}{|BH|}$

d) $\frac{|AB|}{|EF|} \neq \frac{|EF|}{|GH|}$

e) $\frac{|BF|}{|AE|} = \frac{|FH|}{|EG|}$

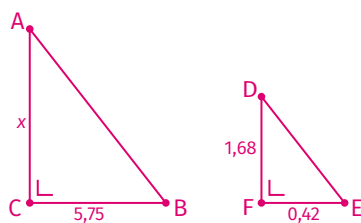
f) $\frac{|CE|}{|DF|} \neq \frac{|AC|}{|BD|}$



>>> Verder oefenen: D35 t.e.m. D53

8

Nina is 1,68 meter lang. Haar schaduw is 42 cm lang. Op hetzelfde ogenblik is de schaduw van een gebouw 5,75 meter lang. Hoe hoog is dat gebouw?



In $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{C} = \hat{F} \text{ (gegeven)} \\ \hat{B} = \hat{E} \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \xRightarrow{HH} \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{1,68} &= \frac{5,75}{0,42} \\ x &= \frac{5,75 \cdot 1,68}{0,42} \\ x &= 23 \end{aligned}$$

Antwoord: Het gebouw is 23 m hoog.

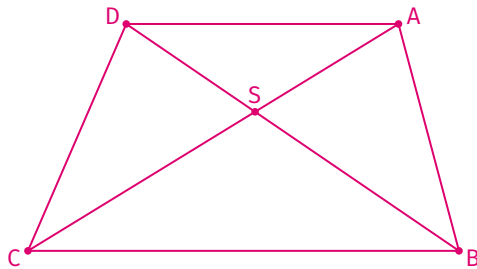
>>> Verder oefenen: D35 t.e.m. D53

9

In een trapezium ABCD zijn AD en BC de evenwijdige zijden. De diagonalen snijden elkaar in het punt S.

- a) Teken een willekeurig trapezium (niet gelijkbenig of rechthoekig).
 b) Bewijs met behulp van de stelling van Thales dat $|AS| \cdot |SB| = |CS| \cdot |SD|$.

a)



b)

AD // BC

⇓ (Thales)

$$\frac{|AS|}{|SD|} = \frac{|CS|}{|SB|}$$

⇓ (hoofdeigenschap evenredigheden)

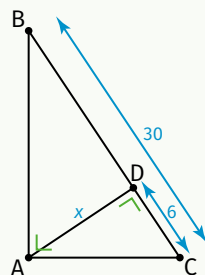
$$|AS| \cdot |SB| = |CS| \cdot |SD|$$

>>> Verder oefenen: D54 t.e.m. D60

10

Bereken de lengte van de gevraagde lijnstukken.

a)



$$|BD| = 30 - 6 = 24$$

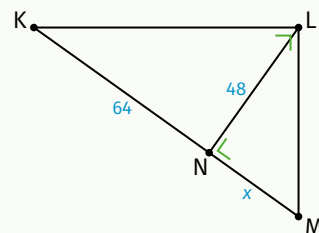
$$x^2 = |DC| \cdot |BD|$$

$$x^2 = 6 \cdot 24$$

$$x^2 = 144$$

$$x = 12$$

b)



$$48^2 = 64 \cdot x$$

$$\frac{48^2}{64} = x$$

$$36 = x$$

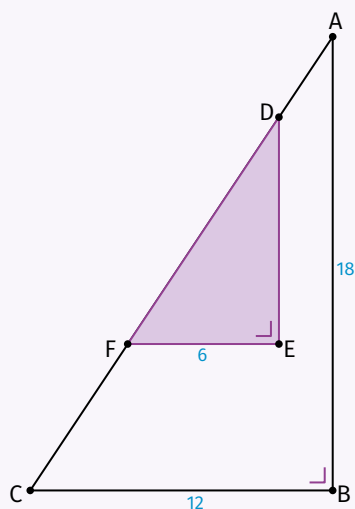
>>> Verder oefenen: D61 t.e.m. D67



Differentiatietraject

1

Beschouw de rechthoekige driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ in de figuur met $BC \parallel EF$. Bepaal $|DE|$.



In $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{E} = 90^\circ \text{ (gegeven)} \\ \hat{C} = \hat{F} \text{ (overeenkomstige hoeken bij } BC \parallel EF \text{ en snijlijn } AC) \end{array} \right\} \xRightarrow{HH} \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

$$\begin{aligned} \frac{|DE|}{|AB|} &= \frac{|EF|}{|CB|} \\ \frac{|DE|}{18} &= \frac{6}{12} \\ |DE| &= \frac{6 \cdot 18}{12} \\ |DE| &= 9 \end{aligned}$$

2

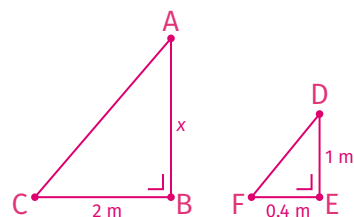
De schaduw van een één meter hoge struik is 0,4 meter lang. De schaduw van een boom is op hetzelfde ogenblik 2 meter lang. Hoe hoog is deze boom? Werk op 0,1 m nauwkeurig.

In $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{E} = 90^\circ \text{ (gegeven)} \\ \hat{C} = \hat{F} \text{ (gegeven)} \end{array} \right\} \xRightarrow{HH} \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

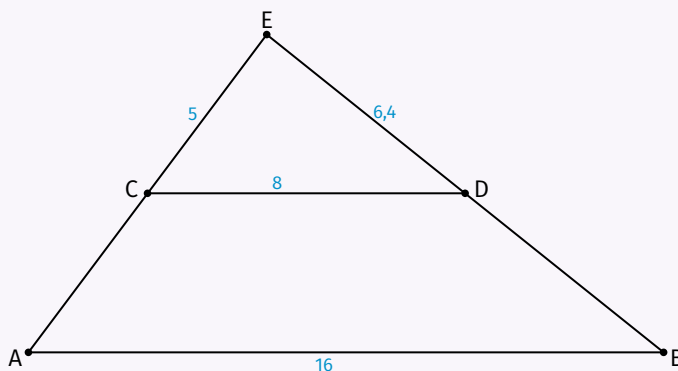
$$\begin{aligned} \frac{|AB|}{|DE|} &= \frac{|BC|}{|EF|} \\ \frac{x}{1} &= \frac{2}{0,4} \\ x &= \frac{2}{0,4} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Antwoord: De boom is 5,0 m hoog.



3

In $\triangle ABE$ en $\triangle CDE$ is $AB \parallel CD$. Bepaal de omtrek van $\triangle ABE$.



In $\triangle EDC$ en $\triangle EBA$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{E} = \hat{E} \text{ (gemeenschappelijke hoek)} \\ \hat{C} = \hat{A} \text{ (overeenkomstige hoeken bij } CD \parallel AB \text{ en snijlijn } EA) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle EDC \sim \triangle EBA$$

$$k = \frac{16}{8} = 2$$

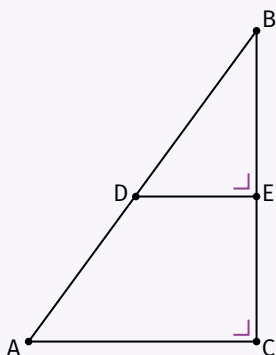
$$|EB| = 2 \cdot |ED| = 2 \cdot 6,4 = 12,8$$

$$|EA| = 2 \cdot |EC| = 2 \cdot 5 = 10$$

$$p_{\triangle EBA} = 12,8 + 16 + 10 = 38,8$$

4

$\triangle ABC$ is rechthoekig in C. De lengte van de rechthoekszijde $[AC]$ is 6 en de hypotenusa $[AB]$ heeft lengte 10. Men tekent $DE \parallel AC$ waarbij $|DE| = 4$. Bereken de lengte $|BD|$ en omring het juiste antwoord.



- a) $\frac{20}{3}$ d) $\frac{15}{2}$
 b) $\frac{16}{3}$ e) 8
 c) 5

© VWO 1994-1995 tweede ronde

$$\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|AC|}$$

$$\frac{|BD|}{10} = \frac{4}{6}$$

$$|BD| = \frac{4 \cdot 10}{6}$$

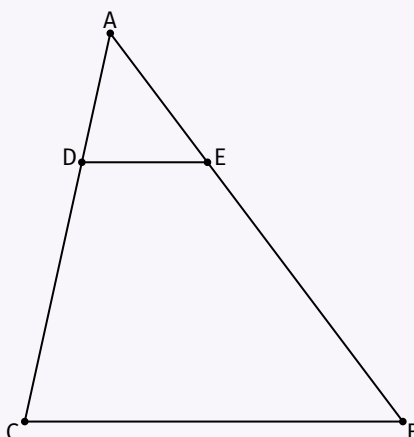
$$|BD| = \frac{20}{3}$$

5

In $\triangle ABC$ is $DE \parallel BC$ en $|BC| = 3 |DE|$. Vul aan.

a) $\frac{|AB|}{|\dots|} = \frac{|\dots|}{|AD|} = 3$

b) $|BE| = \dots |AB|$



a) $\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|AC|}{|AD|} = 3$

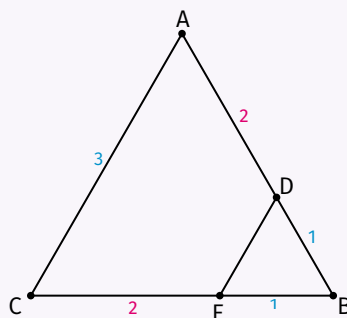
b) $|BE| = \frac{2}{3} |AB|$



6

Uit een gelijkzijdige $\triangle ABC$ – met zijden van lengte 3 – snijdt men een driehoekige punt weg zodat de zijden $[DB]$ en $[EB]$ lengte 1 hebben. Bepaal de omtrek van de overblijvende vierhoek ADEC.

© VWO 1986-1987 tweede ronde



$$\begin{aligned} |AD| &= |AB| - |BD| \text{ en } |CE| = |CB| - |EB| \\ &= 3 - 1 &= 3 - 1 \\ &= 2 &= 2 \end{aligned}$$

$$\frac{|ED|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|AB|}$$

$$\frac{|ED|}{3} = \frac{1}{3}$$

$$|ED| = \frac{3}{3}$$

$$|ED| = 1$$

$$p_{ADEC} = |AC| + |AD| + |ED| + |CE|$$

$$= 3 + 2 + 1 + 2$$

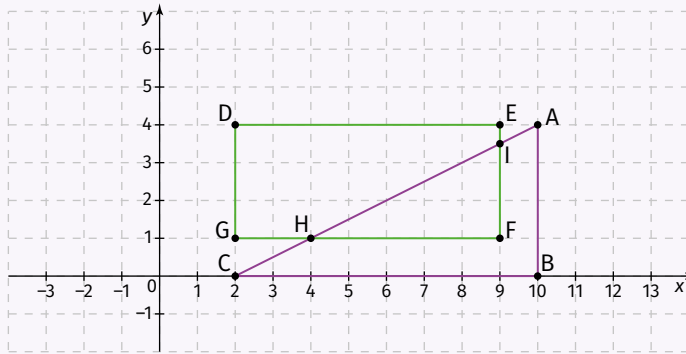
$$= 8$$

Antwoord: De omtrek van ADEC is 8.



7

Bepaal de oppervlakte van $\triangle IFH$.



Bepaal de gelijkvormigheidsfactor van $\triangle IFH$ t.o.v. $\triangle ABC$.

$$k = \frac{|HF|}{|CB|} = \frac{5}{8}$$

$$A_{\triangle ABC} = \frac{8 \cdot 4^2}{2} = 16$$

$$\begin{aligned} A_{\triangle IFH} &= k^2 \cdot A_{\triangle ABC} \\ &= \left(\frac{5}{8}\right)^2 \cdot 16 \\ &= \frac{25 \cdot 16}{64} \\ &= \frac{25}{4} \\ &= 6,25 \end{aligned}$$

Antwoord: De oppervlakte van $\triangle IFH$ is 6,25.

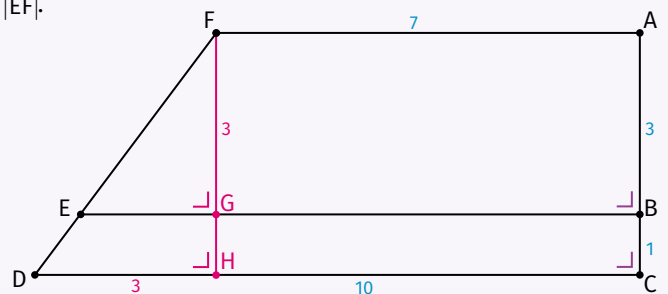


8

Beschouw het rechthoekige trapezium ACDF. Men tekent een rechte $EB \parallel FA$ waarbij $|AB| = 3|BC|$.

a) Als je weet dat $|DF| = 5$, bereken dan $|DE|$ en $|EF|$.

b) Bereken $|BE|$ en vervolgens de oppervlakte van trapezium ABEF.



$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{|EF|}{|DF|} &= \frac{|FG|}{|FH|} \\ \frac{|EF|}{5} &= \frac{3}{4} \\ |EF| &= \frac{3 \cdot 5}{4} \\ |EF| &= \frac{15}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |DE| &= |DF| - |EF| \\ &= 5 - \frac{15}{4} \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{|EG|}{|DH|} &= \frac{|FG|}{|FH|} \\ \frac{|EG|}{3} &= \frac{3}{4} \\ |EG| &= \frac{3 \cdot 3}{4} \\ |EG| &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |EB| &= |EG| + |GB| \\ &= \frac{9}{4} + 7 \\ &= \frac{37}{4} \\ &= 9,25 \end{aligned}$$

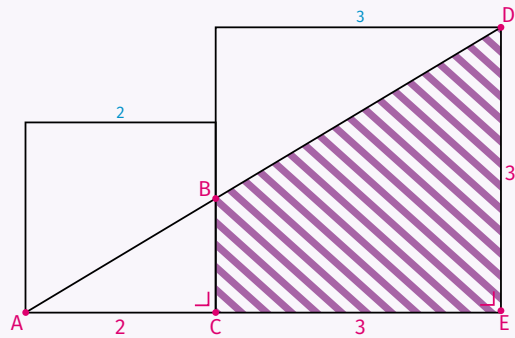
$$\begin{aligned} A_{ABEF} &= \frac{(|EB| + |AF|) \cdot |AB|}{2} \\ &= \frac{\left(\frac{37}{4} + 7\right) \cdot 3}{2} \\ &= \frac{195}{8} \\ &= 24,375 \end{aligned}$$



9

Twee vierkanten met zijde 2 en 3 grenzen aan elkaar zoals in de figuur. Wat is de oppervlakte van het gearceerde trapezium?

- a) 5
- b) 6,3
- c) 7
- d) 7,2
- e) 7,5



© VWO 2015-2016 eerste ronde

$$\begin{aligned}
 \frac{|CB|}{|ED|} &= \frac{|AC|}{|AE|} \\
 \frac{|CB|}{3} &= \frac{2}{5} \\
 |CB| &= \frac{2 \cdot 3}{5} \\
 |CB| &= \frac{6}{5}
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 A_{CBDE} &= \frac{\left(3 + \frac{6}{5}\right) \cdot 3}{2} \\
 &= \frac{63}{10} \\
 &= 6,3
 \end{aligned}$$



10

De piramide T-ABCD wordt gesneden door een vlak α dat evenwijdig is aan het grondvlak van de piramide. De doorsnede van de piramide met het vlak α is de vierhoek PQRS.

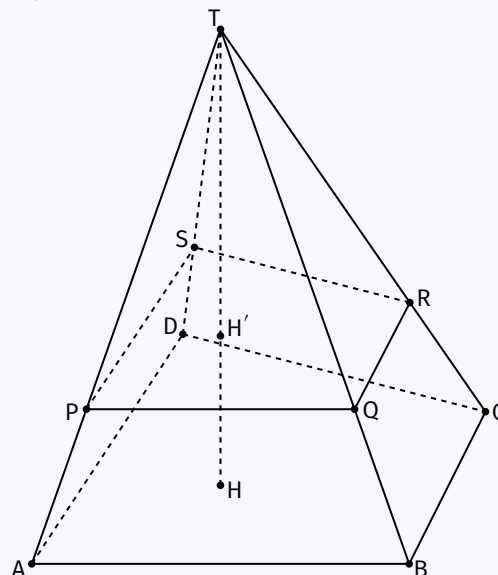
a) Vul aan.

$$\frac{|TH'|}{|TH|} = \frac{|TP|}{|TA|} = \frac{|\dots|}{|TB|} = \frac{|TR|}{|TC|} = \frac{|TS|}{|\dots|} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{|TH'|}{|TH|} = \frac{|PQ|}{|AB|} = \frac{|QR|}{|\dots|} = \frac{|\dots|}{|CD|} = \frac{|SP|}{|DA|} = \frac{2}{3}$$

b) Bepaal $|PQ|$ als je weet dat $|AB| = 12$.

c) Bepaal $|CD|$ als je weet dat $|RS| = 9$.



$$a) \frac{|TH'|}{|TH|} = \frac{|TP|}{|TA|} = \frac{|TQ|}{|TB|} = \frac{|TR|}{|TC|} = \frac{|TS|}{|TD|} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{|TH'|}{|TH|} = \frac{|PQ|}{|AB|} = \frac{|QR|}{|BC|} = \frac{|RS|}{|CD|} = \frac{|SP|}{|DA|} = \frac{2}{3}$$

$$b) \frac{|PQ|}{|AB|} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{|PQ|}{12} = \frac{2}{3}$$

$$|PQ| = \frac{2 \cdot 12^4}{12^3}$$

$$|PQ| = 8$$

$$c) \frac{|RS|}{|CD|} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{9}{|CD|} = \frac{2}{3}$$

$$|CD| = \frac{9 \cdot 3}{2}$$

$$|CD| = \frac{27}{2}$$

$$|CD| = 13,5$$



11

Bepaal de verhouding van de inhoud van piramide T-PQRS tot de inhoud van piramide T-ABCD uit de vorige oefening als $\frac{|TH'|}{|TH|} = \frac{2}{3}$.

$$V_{T-PQRS} = k^3 \cdot V_{T-ABCD}$$

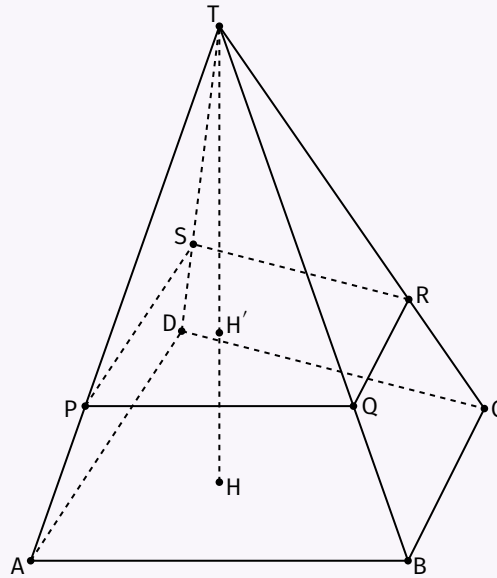
$$\frac{V_{T-PQRS}}{V_{T-ABCD}} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\frac{V_{T-PQRS}}{V_{T-ABCD}} = \frac{8}{27}$$



12

Je ziet een piramide met top T en grondvlak ABCD. Een vlak α is evenwijdig met het grondvlak van de piramide. Dit vlak verdeelt de piramide in twee delen met gelijke inhoud. H is het voetpunt van de loodlijn uit de top T op het grondvlak ABCD en H' is het voetpunt van de loodlijn uit T op het vlak α . Bepaal de verhouding $\frac{|TH|}{|TH'|}$.



$$\frac{|TH|}{|TH'|} = \frac{|TB|}{|TQ|} = \frac{|TC|}{|TR|} = \frac{|AB|}{|PQ|} = \frac{|BC|}{|RQ|} = \frac{|CD|}{|RS|} = \frac{|DA|}{|SP|} = k$$

$$\frac{A_{ABCD}}{A_{PQRS}} = k^2$$

$$\frac{V_{T-ABCD}}{V_{T-PQRS}} = k^3 \implies \begin{aligned} k^3 &= 2 \\ k &= \sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

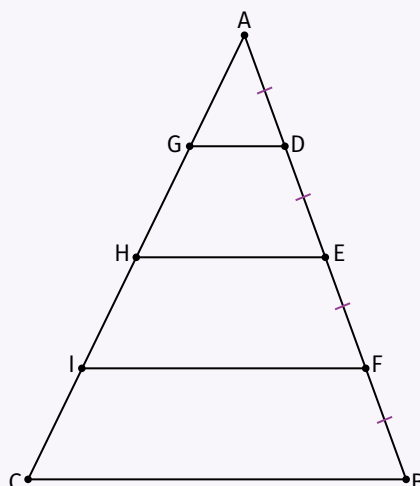
$$\text{Dus: } \frac{|TH|}{|TH'|} = \sqrt[3]{2}$$



13

In $\triangle ABC$ worden er drie rechten evenwijdig aan BC getekend. Deze drie rechten verdelen $[AB]$ in vier gelijke lijnstukken. Vul aan.

- a) $\frac{|AF|}{|AI|} = \frac{|DF|}{|\dots|} = \frac{|\dots|}{|IC|}$
- b) $|CH| \cdot |EF| = |BE| \cdot |\dots|$
- c) $|DE| \cdot |IA| = |GH| \cdot |\dots|$



- a) $\frac{|AF|}{|AI|} = \frac{|DF|}{|GI|} = \frac{|FB|}{|IC|}$
- b) $|CH| \cdot |EF| = |BE| \cdot |HI|$
- c) $|DE| \cdot |IA| = |GH| \cdot |AF|$



14

Bepaal de oppervlakte van trapezium $EFIH$ uit oefening 13 als je weet dat de basis en hoogte van $\triangle ABC$ respectievelijk 8 en 10 zijn.

In $\triangle AFI$ en $\triangle ABC$:

$$\begin{aligned}\frac{|IF|}{|CB|} &= \frac{|AF|}{|AB|} \\ \frac{|IF|}{8} &= \frac{3}{4} \\ |IF| &= \frac{3 \cdot 8^2}{4} \\ |IF| &= 6\end{aligned}$$

In $\triangle AEH$ en $\triangle ABC$:

$$\begin{aligned}\frac{|EH|}{|CB|} &= \frac{|AE|}{|AB|} \\ \frac{|EH|}{8} &= \frac{2}{4} \\ |EH| &= \frac{2 \cdot 8^2}{4} \\ |EH| &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{EFIH} &= \frac{(|IF| + |EH|) \cdot 2,5}{2} \\ &= \frac{(6 + 4) \cdot 2,5}{2} \\ &= \frac{25}{2} \\ &= 12,5\end{aligned}$$

Antwoord: De oppervlakte van het trapezium is 12,5.



15

Bepaal de verhouding $\frac{|TH'|}{|TH|}$ uit oefening 12.

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$

c) $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$

d) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

e) $\frac{\sqrt[3]{5}}{2}$

© VWO 2009-2010 tweede ronde

$$\frac{V_{T-PQRS}}{V_{T-ABCD}} = \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$k^3 = \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

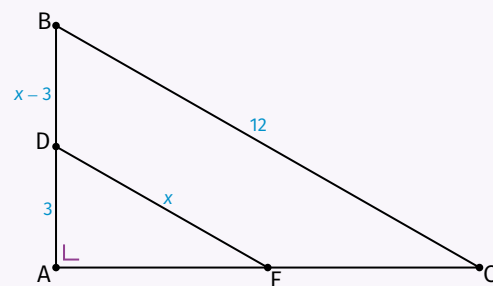
$$k = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \quad (\text{gelijkvormigheidsfactor})$$

$$\frac{|TH'|}{|TH|} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

16

 $\triangle ABC$ en $\triangle ADE$ zijn rechthoekig in A. Verder is $BC \parallel DE$.a) Verklaar waarom $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

b) Bepaal de waarde van de onbekende x.

a) In $\triangle ABC$ en $\triangle ADE$ geldt:

$$\hat{A} = \hat{A} = 90^\circ \quad (\text{gemeenschappelijke hoek})$$

$$\hat{B} = \hat{D} \quad (\text{overeenkomstige hoeken bij } BC \parallel DE \text{ en snijlijn } AB)$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A} = 90^\circ \\ \hat{B} = \hat{D} \end{array} \right\} \xRightarrow{HH} \triangle ABC \sim \triangle ADE$$

$$\text{b) } \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|BC|}$$

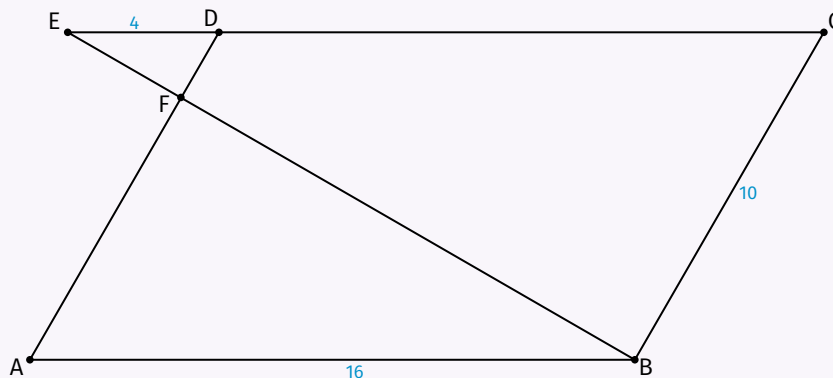
$$\frac{3}{x-3+3} = \frac{x}{12}$$

$$36 = x^2$$

$$6 = x \quad \text{of} \quad x = -6 \rightarrow \text{niet relevant}$$

17

ABCD is een parallellogram waarin $|AB| = 16$ en $|BC| = 10$. Verleng nu de zijde $[CD]$ langs de kant van D tot een punt E zodat $|DE| = 4$. F is het snijpunt van BE met AD. Bepaal $|AF|$.



$$\begin{aligned}\frac{|ED|}{|EC|} &= \frac{|DF|}{|BC|} \\ \frac{4}{20} &= \frac{|DF|}{10} \\ |DF| &= \frac{4 \cdot 10}{20} \\ |DF| &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|AF| &= |AD| - |DF| \\ &= 10 - 2 \\ &= 8\end{aligned}$$



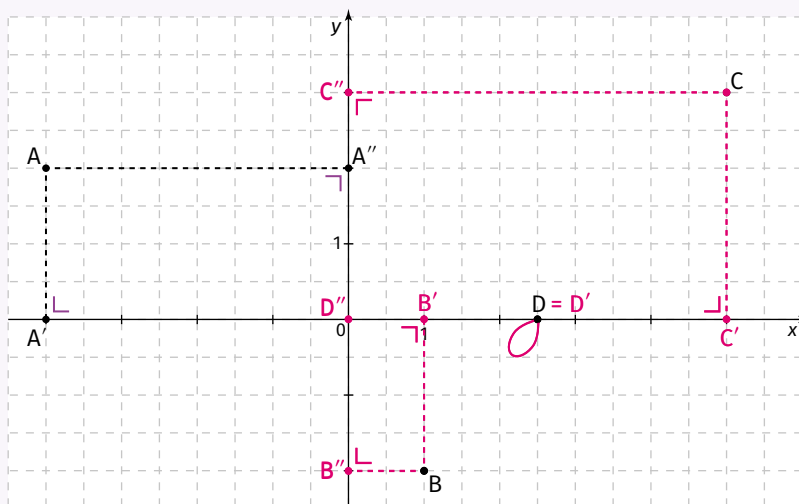
18

a) Teken de beelden van de gegeven punten B, C en D door de orthogonale projectie op de x-as en de y-as.

Benoem de beelden op deze manier:

$$p_x(A) = A'$$

$$p_y(A) = A''$$



b) Bepaal de coördinaten van de punten B, B' en B''.

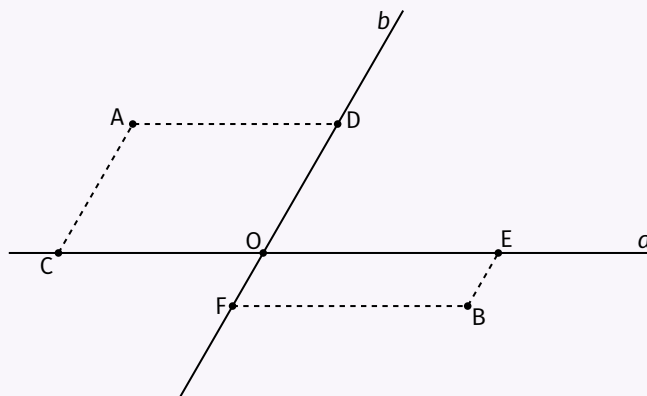
$$B(1, -2); B'(1, 0); B''(0, -2)$$



19

Bepaal het projectiebeeld van de volgende rechten en lijnstukken.

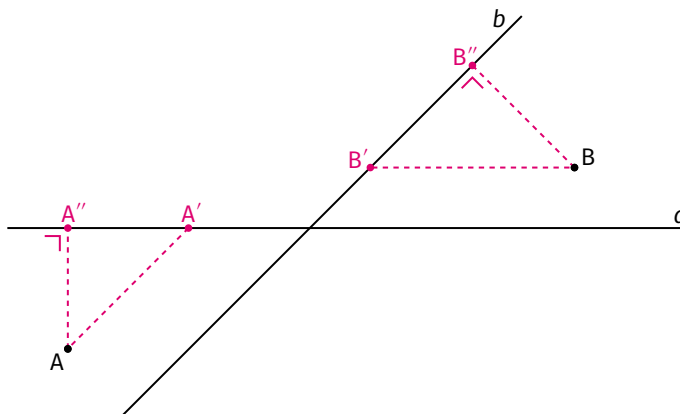
- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| a) $p_a^b([AB]) = \dots$ | f) $p_b^a(AB) = \dots$ |
| b) $p_a^b(AC) = \dots$ | g) $p_b^a([AC]) = \dots$ |
| c) $p_a^b([AD]) = \dots$ | h) $p_b^a(AD) = \dots$ |
| d) $p_a^b(AE) = \dots$ | i) $p_b^a([AE]) = \dots$ |
| e) $p_a^b([AF]) = \dots$ | j) $p_b^a([AF]) = \dots$ |



- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| a) $p_a^b([AB]) = \mathbf{[CE]}$ | f) $p_b^a(AB) = \mathbf{b}$ |
| b) $p_a^b(AC) = \mathbf{\{C\}}$ | g) $p_b^a([AC]) = \mathbf{[DO]}$ |
| c) $p_a^b([AD]) = \mathbf{[CO]}$ | h) $p_b^a(AD) = \mathbf{\{D\}}$ |
| d) $p_a^b(AE) = \mathbf{a}$ | i) $p_b^a([AE]) = \mathbf{[DO]}$ |
| e) $p_a^b([AF]) = \mathbf{[CO]}$ | j) $p_b^a([AF]) = \mathbf{[DF]}$ |

20

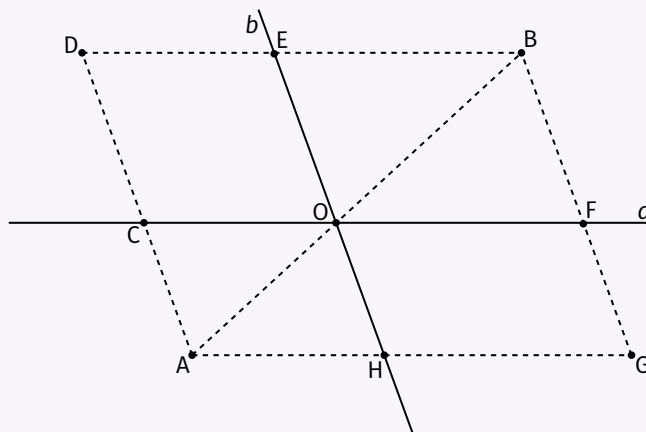
Teken $p_a^b(A) = A'$, $p_b^a(B) = B'$, $p_a(A) = A''$ en $p_b(B) = B''$.



21

Bepaal het projectiebeeld van de volgende rechten en lijnstukken.

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| a) $p_a^b([AB]) = \dots$ | g) $p_b^a([AB]) = \dots$ |
| b) $p_a^b([BD]) = \dots$ | h) $p_b^a([AE]) = \dots$ |
| c) $p_a^b(BD) = \dots$ | i) $p_b^a([HO]) = \dots$ |
| d) $p_a^b([BG]) = \dots$ | j) $p_b^a(CF) = \dots$ |
| e) $p_a^b([BO]) = \dots$ | k) $p_b^a(DH) = \dots$ |
| f) $p_a^b([CG]) = \dots$ | l) $p_b^a([BC]) = \dots$ |



- | | |
|-----------------------------------|----------------------------------|
| a) $p_a^b([AB]) = \mathbf{[CF]}$ | g) $p_b^a([AB]) = \mathbf{[HE]}$ |
| b) $p_a^b([BD]) = \mathbf{[FC]}$ | h) $p_b^a([AE]) = \mathbf{[HE]}$ |
| c) $p_a^b(BD) = \mathbf{a}$ | i) $p_b^a([HO]) = \mathbf{[HO]}$ |
| d) $p_a^b([BG]) = \mathbf{\{F\}}$ | j) $p_b^a(CF) = \mathbf{\{O\}}$ |
| e) $p_a^b([BO]) = \mathbf{[FO]}$ | k) $p_b^a(DH) = \mathbf{b}$ |
| f) $p_a^b([CG]) = \mathbf{[CF]}$ | l) $p_b^a([BC]) = \mathbf{[EO]}$ |

22

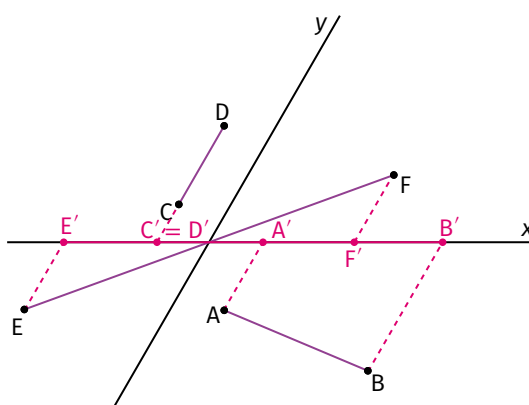
De rechten a en b zijn snijdend. Een derde rechte r wordt geprojecteerd. Vul aan.

$p_a^b(r)$ is een rechte als ... en $p_a^b(r)$ is een punt als ...

$p_a^b(r)$ is een rechte als $r \nparallel b$ en $p_a^b(r)$ is een punt als $r \parallel b$.

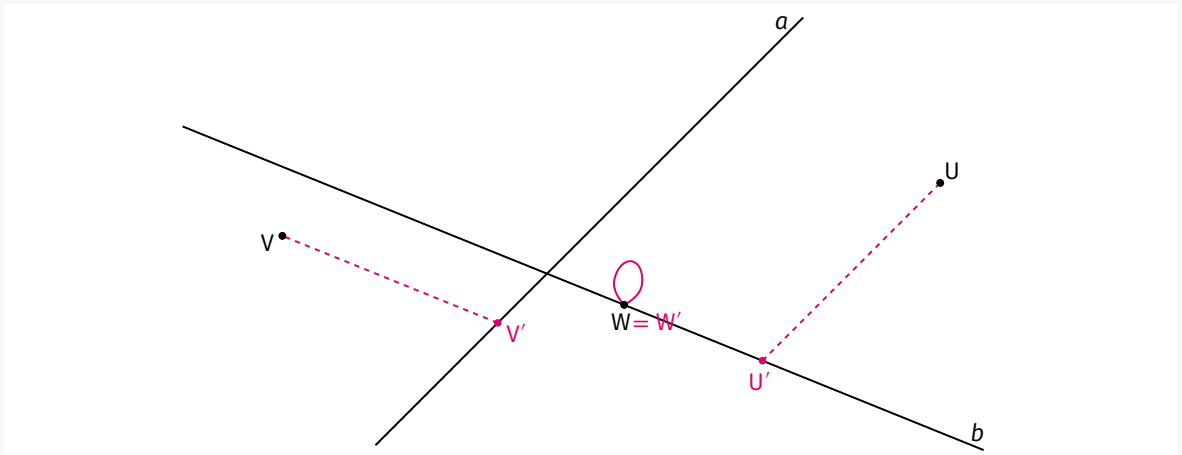
23

Teken het beeld van de onderstaande lijnstukken door de projectie p_x^y .



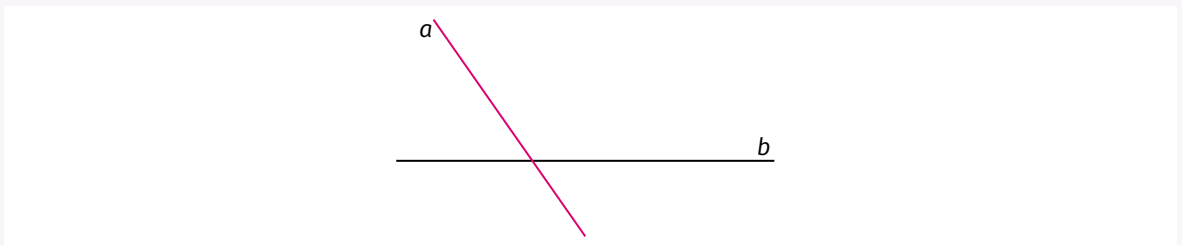
24

Teken $p_b^a(U) = U'$, $p_a^b(V) = V'$ en $p_b^a(W) = W'$.



25

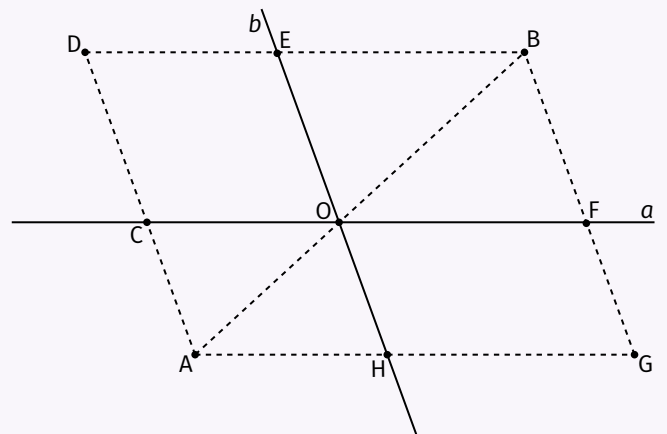
Kleur alle punten van het vlak die door de projectie p_a^b op zichzelf worden afgebeeld.



26

Vul aan.

- | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|
| a) $p_b^a(\dots) = [EO]$ | f) $p_{DE}^{\dots}([CF]) = [DB]$ |
| b) $p_a^b(\dots) = \{C\}$ | g) $p_{DE}^{\dots}([CF]) = [DB]$ |
| c) $p_{AB}^{\dots}([CD]) = [OB]$ | h) $p_{\dots}^{\dots}([EH]) = \{O\}$ |
| d) $p_{AB}^{\dots}([CD]) = [OB]$ | i) $p_{\dots}^b([CG]) = [DF]$ |
| e) $p_{\dots}^a([DG]) = [BG]$ | j) $p_{HF}^{\dots}([AC]) = [HF]$ |



bv.

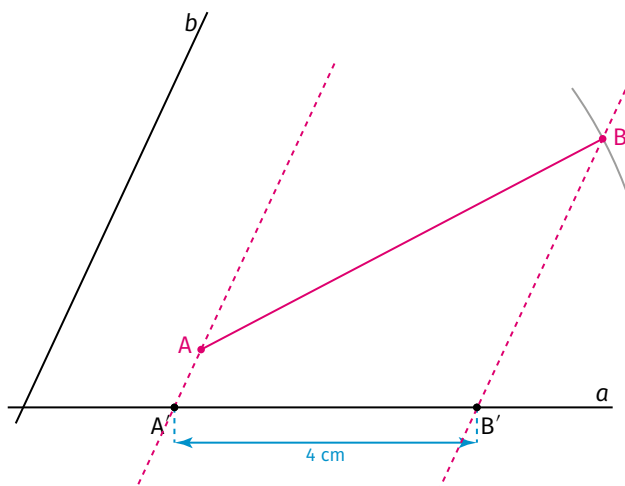
- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| a) $p_b^a([BF]) = [EO]$ | f) $p_{AD}^a(BH) = AD$ |
| b) $p_a^b([AD]) = \{C\}$ | g) $p_{DE}^b([CF]) = [DB]$ |
| c) $p_{AG}^b([DF]) = [AG]$ | h) $p_a^b([EH]) = \{O\}$ |
| d) $p_{AB}^a([CD]) = [OB]$ | i) $p_{DF}^b([CG]) = [DF]$ |
| e) $p_{BF}^a([DG]) = [BG]$ | j) $p_{HF}^a([AC]) = [HF]$ |



27

Teken een lijnstuk $[AB]$ zodat $|AB| = 6 \text{ cm}$ en $p_a^b([AB]) = [A'B']$.

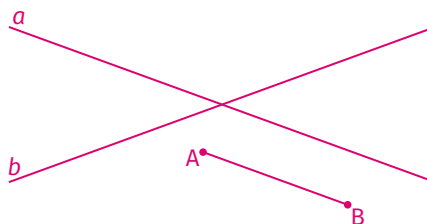
bv.



28

Teken een projectieas a , een projectierichting b en een lijnstuk $[AB]$ zodat de lengte van het lijnstuk door de projectie bewaard blijft.

bv.

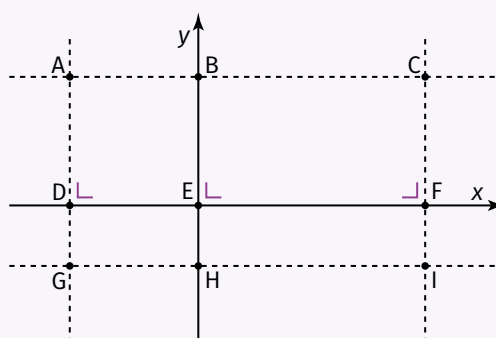


29

Vul aan.

a) $p_x(Q) = F$ en $p_y(Q) = H \implies Q = \dots$

b) $p_x(Q) = D$ en $p_y(Q) = E \implies Q = \dots$



a) $p_x(Q) = F$ en $p_y(Q) = H \implies Q = \mathbf{I}$

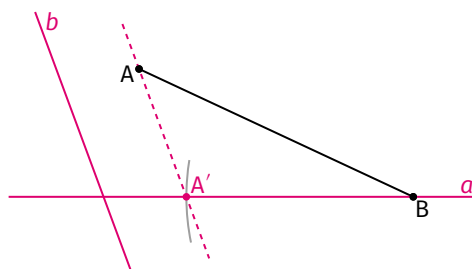
b) $p_x(Q) = D$ en $p_y(Q) = E \implies Q = \mathbf{D}$



30

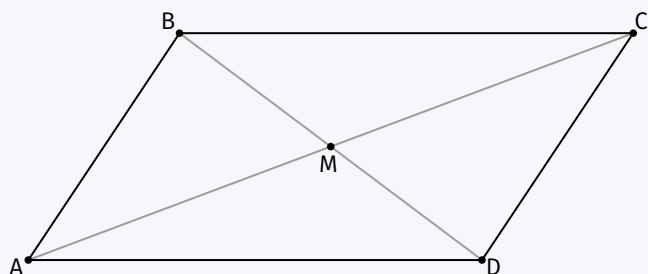
Teken een projectieas a en een projectierichting b zodat het beeld van $[AB]$ na projectie een lijnstuk $[A'B']$ met lengte 3 cm is.

bv.



31

ABCD is een parallellogram waarbij de diagonalen elkaar snijden in het punt M. Bepaal het beeld van elke zijde door de projectie op AC volgens richting AB.



a) $p_{AC}^{AB}([AB]) = \dots$

b) $p_{AC}^{AB}([BC]) = \dots$

c) $p_{AC}^{AB}([CD]) = \dots$

d) $p_{AC}^{AB}([AD]) = \dots$

a) $p_{AC}^{AB}([AB]) = \{A\}$

b) $p_{AC}^{AB}([BC]) = [AC]$

c) $p_{AC}^{AB}([CD]) = \{C\}$

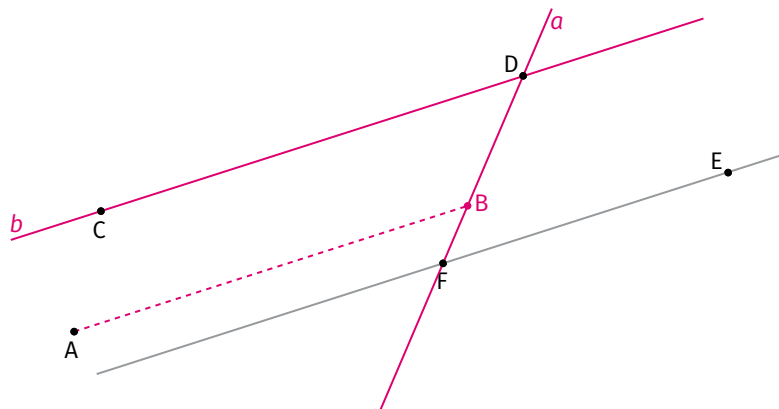
d) $p_{AC}^{AB}([AD]) = [AC]$



32

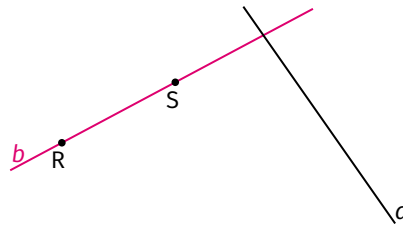
Gegeven: $p_a^b(C) = D$ en $p_a^b(E) = F$

Gevraagd: Teken B als $B = p_a^b(A)$.



33

Teken een rechte b zodat: $p_a^b(R) = p_a^b(S)$.
Zijn er meerdere oplossingen mogelijk?



Ja, elke rechte evenwijdig aan b .



34

De evenwijdige rechten a en b worden gesneden door de rechte s .

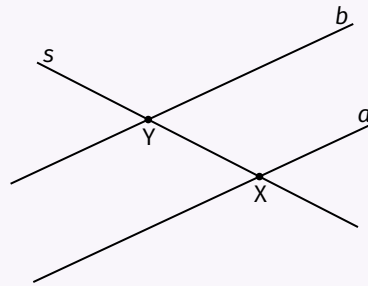
Vul aan.

a) $p_a^s(b) = \dots$

b) $p_s^a(b) = \dots$

c) $p_b^{xy}(s) = \dots$

d) $p_{xy}^b(a) = \dots$



a) $p_a^s(b) = a$

b) $p_s^a(b) = \{Y\}$

c) $p_b^{xy}(s) = \{Y\}$

d) $p_{xy}^b(a) = \{X\}$



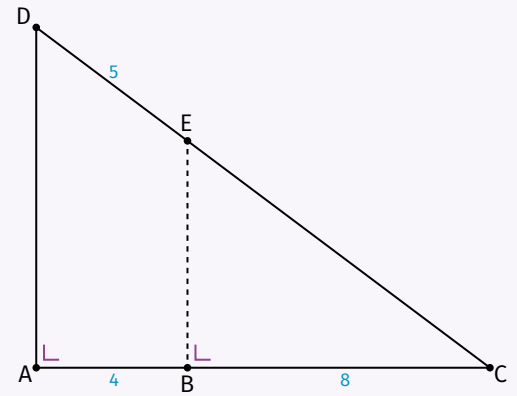
35

 $\triangle ADC$ en $\triangle BEC$ zijn rechthoekig en $AD \parallel BE$.Bepaal $|EC|$.

a) Toon je antwoord aan met de stelling van Thales.
Projecteer de lijnstukken $[DE]$ en $[EC]$ loodrecht op AC .

b) Toon je antwoord aan met behulp van gelijkvormige driehoeken.

- Kies twee driehoeken die gelijkvormig zijn.
- Bewijs hun gelijkvormigheid.
- Noteer in symbolen dat de lengtes van de schuine zijde zich verhouden tot de lengtes van de horizontale rechthoekszijden.



a) $p_{AC}([DE]) = [AB]$ en $p_{AC}([EC]) = [BC]$

$$\frac{|EC|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|AB|}$$

$$\frac{|EC|}{8} = \frac{5}{4}$$

$$|EC| = \frac{5 \cdot 8}{4}$$

$$|EC| = 10$$

b) In $\triangle ADC$ en $\triangle BEC$:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \text{ (gegeven)} \\ \hat{C} = \hat{C} \text{ (gemeenschappelijke hoek)} \end{array} \right\} \xRightarrow{HH} \triangle ADC \sim \triangle BEC$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{|AD|}{|BE|} = \frac{|DC|}{|EC|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

$$\frac{|DC|}{|EC|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

$$\frac{5 + |EC|}{|EC|} = \frac{12}{8}$$

$$8(5 + |EC|) = 12|EC|$$

$$40 + 8|EC| = 12|EC|$$

$$40 = 4|EC|$$

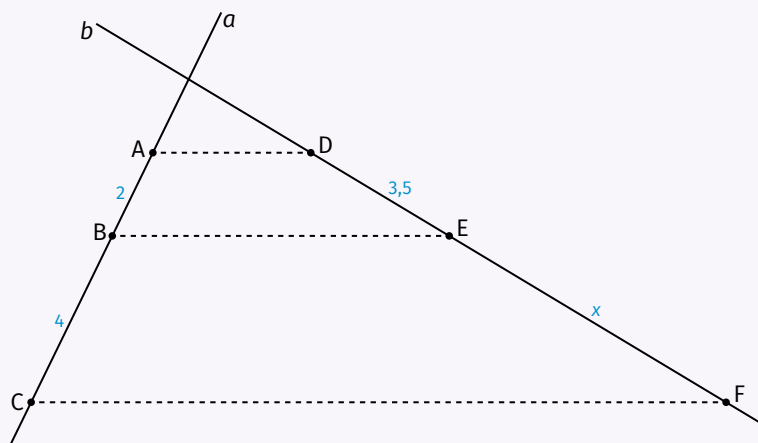
$$10 = |EC|$$



36

- a) Bereken de onbekende lengte $|EF|$ met behulp van de stelling van Thales.
b) Welke projectieas en welke projectierichting heb je hierbij gebruikt?

Gegeven: $AD \parallel BE \parallel CF$

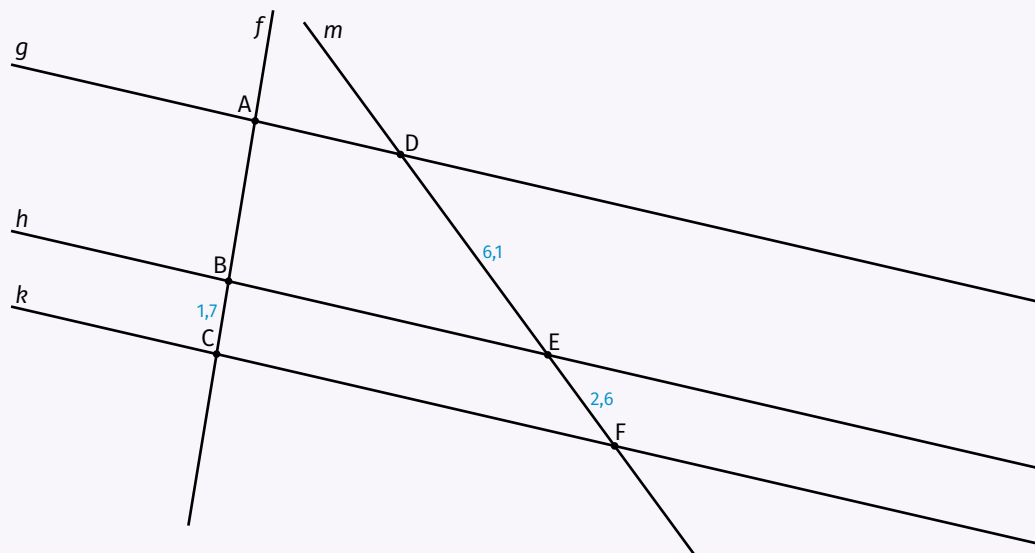


$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{|EF|}{|BC|} &= \frac{|DE|}{|AB|} \\ \frac{x}{4} &= \frac{3,5}{2} \\ x &= \frac{3,5 \cdot 4}{2} \\ x &= 7 \end{aligned}$$

b) projectieas: b
projectierichting: AD

37

Bepaal de lengte van het lijnstuk $[AB]$ als je weet dat $g \parallel h \parallel k$. Werk op 0,01 nauwkeurig.

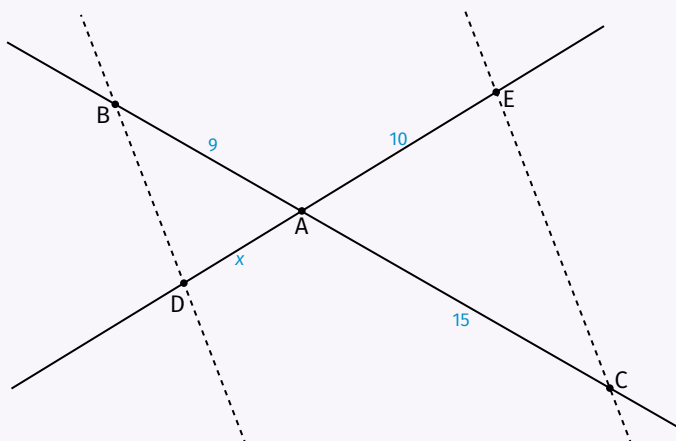


$$\begin{aligned} \frac{|AB|}{|DE|} &= \frac{|BC|}{|EF|} \\ \frac{|AB|}{6,1} &= \frac{1,7}{2,6} \\ |AB| &= \frac{1,7 \cdot 6,1}{2,6} \\ |AB| &\approx 3,99 \end{aligned}$$

38

a) Bereken de onbekende lengte x met behulp van de stelling van Thales.

b) Welke projectieas en welke projectierichting heb je gebruikt?

Gegeven: $BD \parallel EC$ 

$$a) \frac{x}{9} = \frac{10}{15}$$

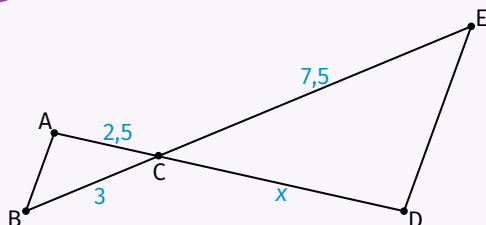
$$x = \frac{10^2 \cdot 9^3}{15^4}$$

$$x = 6$$

b) projectieas: ED
projectierichting: BD



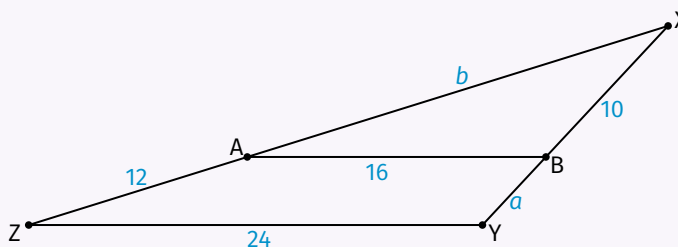
39

a) Bereken x als je weet dat $AB \parallel ED$.b) Bereken a en b als je weet dat $AB \parallel YZ$.

$$a) \frac{x}{7,5} = \frac{2,5}{3}$$

$$x = \frac{2,5 \cdot 7,5}{3}$$

$$x = 6,25$$



$$b) \frac{10}{10+a} = \frac{b}{b+12} = \frac{16}{24}$$

$$10 \cdot 24 = 16(10+a)$$

$$240 = 160 + 16a$$

$$80 = 16a$$

$$5 = a$$

$$24b = 16(b+12)$$

$$24b = 16b + 192$$

$$8b = 192$$

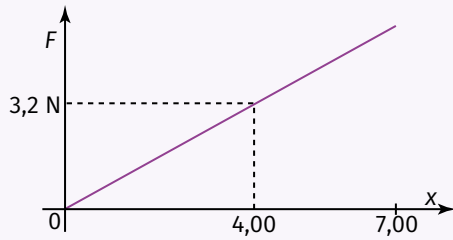
$$b = 24$$



40

Als we een veer vanuit haar rustlengte willen uitrekken, dan moeten we hiervoor een kracht uitoefenen die recht evenredig is met de toename van de lengte van de veer. Veronderstel dat de lengte van een veer met 4 cm toeneemt als we een trekkraft van 3,2 N (Newton) op de veer uitoefenen.

Welke kracht moeten we uitoefenen om diezelfde veer 7 cm te laten uitrekken?



$$\frac{x}{7} = \frac{3,2}{4}$$

$$x = \frac{3,2 \cdot 7}{4}$$

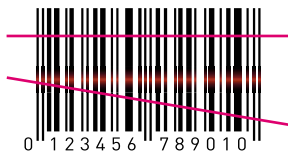
$$x = 5,6$$

Antwoord: Je moet een kracht van 5,6 N uitoefenen.



41

De barcode op verpakkingen bestaat uit een streepjescode. De code wordt bepaald door de dikte van de opeenvolgende zwarte en witte rechthoeken. Cijfercodes hebben als nadeel dat ze soms moeilijk te ontcijferen zijn voor een scanner (laserstraal). De code moet immers vanuit verschillende richtingen leesbaar zijn. Toon met de stelling van Thales aan dat een barcode - voor gelijk welke richting waarin de scanner leest - correct ontcijferd wordt.



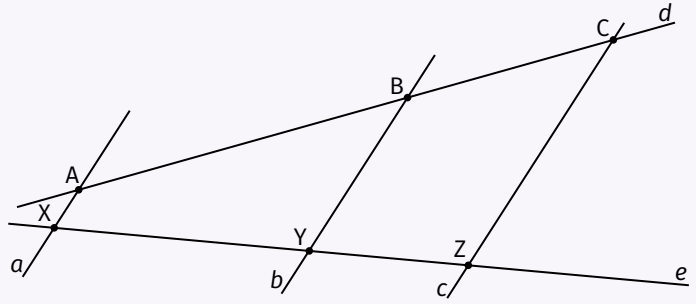
Antwoord: De verhouding van de lijnstukken blijft gelijk.



42

Gegeven: $a \parallel b \parallel c$
 $|AB| = 8$ en $|BC| = 5$
 $|XY| = 6$

Gevraagd: $|YZ|$



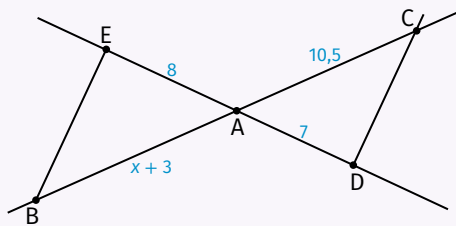
$$\begin{aligned}\frac{|YZ|}{|BC|} &= \frac{|XY|}{|AB|} \\ \frac{|YZ|}{5} &= \frac{6}{8} \\ |YZ| &= \frac{6^3 \cdot 5}{8^4} \\ |YZ| &= \frac{15}{4} \\ |YZ| &= 3,75\end{aligned}$$



43

- a) Bereken de onbekende lengte x met behulp van de stelling van Thales.
 b) Welke projectieas en welke projectierichting heb je gebruikt?

Gegeven: $EB \parallel CD$



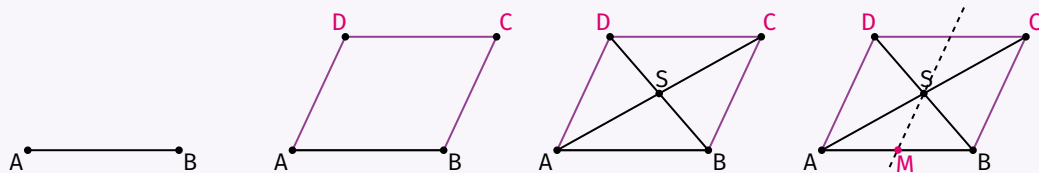
$$\begin{aligned}\text{a) } \frac{x+3}{8} &= \frac{10,5}{7} \\ x+3 &= \frac{10,5 \cdot 8}{7} \\ x+3 &= 12 \\ x &= 12 - 3 \\ x &= 9\end{aligned}$$

- b) projectieas: BC
 projectierichting: EB



44

De stelling van Thales kan je gebruiken om een gegeven lijnstuk $[AB]$ in twee gelijke delen te verdelen, zonder te meten. De constructie wordt hieronder uitgevoerd. Verklaar deze constructie.

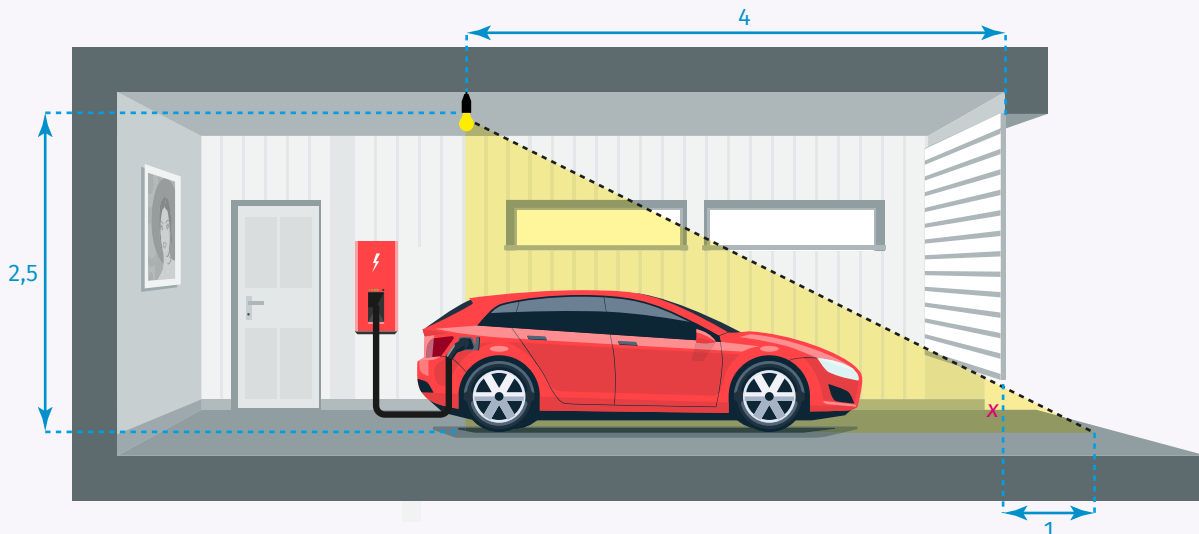


- Teken een parallellogram waarvan $[AB]$ een zijde is.
 $AB \parallel CD$ en $AD \parallel BC$
- De diagonalen van een parallellogram snijden elkaar middendoor.
 $|AS| = |SC| \quad (1)$
- $p_{AB}^{AD}([AS]) = [AM]$
 $p_{AB}^{AD}([SC]) = [MB]$
- Stelling van Thales: $\frac{|AS|}{|AM|} = \frac{|SC|}{|MB|}$
 $\frac{|MB|}{|AM|} = 1 \quad (\text{uit (1)})$
 $|AM| = |MB|$



45

Een garagepoort gaat langzaam naar beneden. Bij het sluiten van de poort schijnt het licht van een lamp tot 1 meter verder dan de poort. De lamp bevindt zich op een hoogte van 2,5 meter. De horizontale afstand tussen de garagepoort en de lamp is 4 meter. Hoe hoog bevindt de garagepoort zich dan boven de vloer?



$$\begin{aligned} \frac{x}{2,5} &= \frac{1}{4+1} \\ x &= \frac{2,5}{5} \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Antwoord: Op dat ogenblik is de garagepoort 0,5 m boven de vloer.



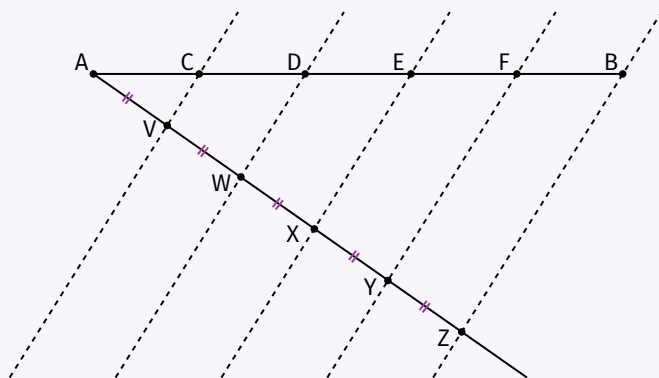
46

De stelling van Thales kan je gebruiken om een gegeven lijnstuk $[AB]$ in n gelijke delen te verdelen, zonder te meten. Hieronder vind je een constructiemethode om $[AB]$ in 5 even lange lijnstukken te verdelen.

- Teken een rechte door A (verschillend van AB).
- Pas op deze rechte vijf gelijke lijnstukken af. Zo bekom je de punten V, W, ..., Z.
- Verbind Z met B.
- Construeer de beelden van de punten V, W, ..., Z door projectie op de rechte AB volgens de richting ZB.

Uit de constructie volgt dat $|AC| = |CD| = |DE| = |EF| = |FB|$. De punten C, D, E en F verdelen het lijnstuk $[AB]$ in vijf even lange stukken.

Verklaar op welke wijze we de stelling van Thales hebben toegepast in deze constructie.



$$\frac{|AC|}{|AV|} = \frac{|CD|}{|VW|} = \frac{|DE|}{|WX|} = \frac{|EF|}{|XY|} = \frac{|FB|}{|YZ|}$$

$$\frac{|AC|}{|AV|} = \frac{|CD|}{|AV|} = \frac{|DE|}{|AV|} = \frac{|EF|}{|AV|} = \frac{|FB|}{|AV|} \quad (\text{uit constructie})$$

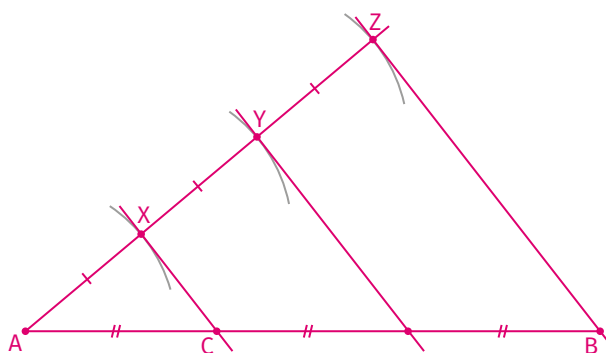
$$|AC| = |CD| = |DE| = |EF| = |FB|$$



47

Teken een lijnstuk $[AB]$ met een willekeurige lengte. Construeer het punt $C \in [AB]$ zodat $|AC| = \frac{1}{3} |AB|$. Gebruik de methode uit oefening 46.

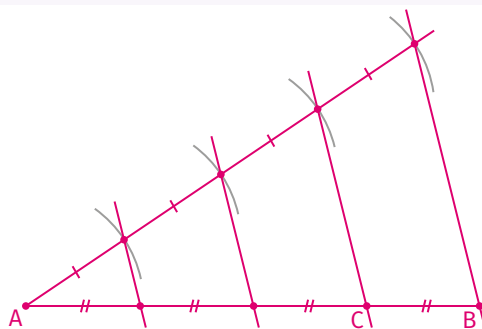
bv.



48

De constructie uit oefening 46 kan veralgemeend worden om een lijnstuk te construeren waarvan de lengte een veelvoud p/q van een gegeven lengte is. Teken een lijnstuk $[AB]$. Construeer vervolgens een lijnstuk $[AC]$ zodat $|AC| = \frac{3}{4} |AB|$.

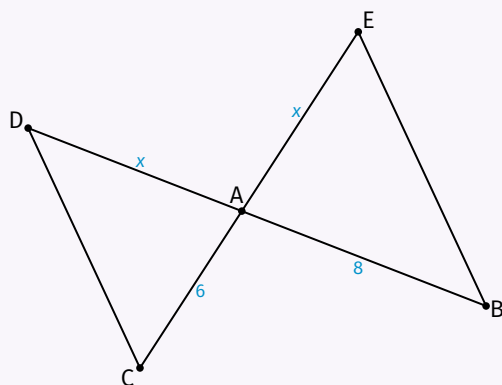
bv.



49

- a) Bereken de onbekende lengte x met behulp van de stelling van Thales.
b) Welke projectieas en welke projectierichting heb je gebruikt?

Gegeven: $CD \parallel EB$



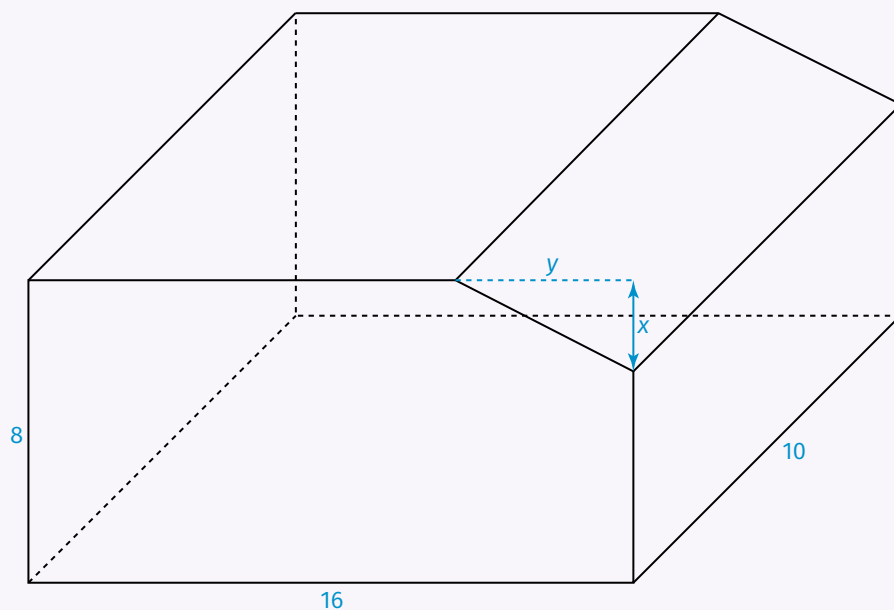
a) $\frac{x}{6} = \frac{8}{x}$
 $x^2 = 48$
 $x = \sqrt{48}$ of $x = -\sqrt{48}$ ($\leftarrow$ niet relevant)
 $x = 4\sqrt{3}$

- b) projectieas: AB
projectierichting: CD



50

Een houten blok heeft de vorm van een balk. De afmetingen van de balk vind je op de figuur. Het blok wordt gefreesd volgens de richting van een diagonaal in het voorvlak zodat het volume van het houten blok met 16 % gereduceerd wordt. Hoe diep moet men frezen? Werk op 0,01 nauwkeurig.



$$\begin{aligned} \bullet V_{\text{blok}} &= 8 \cdot 16 \cdot 10 \\ &= 1280 \end{aligned}$$

$$\bullet \frac{x}{8} = \frac{y}{16}$$

$$16x = 8y$$

$$2x = y$$

$$\begin{aligned} \bullet V_{\text{frees}} &= 0,16 \cdot V_{\text{blok}} \\ &= 0,16 \cdot 1280 \\ &= 204,8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet V_{\text{frees}} &= \frac{x \cdot y \cdot 10}{2} \\ &= x \cdot 2x \cdot 5 \\ &= 10x^2 \end{aligned}$$

$$\bullet 10x^2 = 204,8$$

$$x^2 = 20,48$$

$$x \approx 4,5 \text{ of } x \approx -4,5 \rightarrow \text{niet relevant}$$

Antwoord: Men moet ongeveer op een diepte van 4,5 frezen.



51

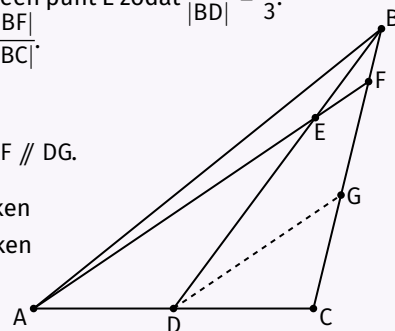
In een willekeurige $\triangle ABC$ is $[BD]$ een zwaartelijn. Op deze zwaartelijn ligt een punt E zodat $\frac{|BE|}{|BD|} = \frac{1}{3}$. De rechten AE en BC snijden elkaar in het punt F . Bepaal de verhouding $\frac{|BF|}{|BC|}$.

- Uit de definitie van een zwaartelijn volgt dat $|...| = |...|$.
- Pas de stelling van Thales toe voor de projectie volgens de richting $AF \parallel DG$.
- Volgens de stelling van Thales verhouden de lengtes van de lijnstukken op de rechte BD zich op dezelfde wijze als de lengtes van de lijnstukken op de rechte BC .

Vul aan.

$$|BD| = 3 \cdot |BE| \xRightarrow{\text{Thales}} |...| = 3 \cdot |...|$$

- Projecteer $[AD]$ en $[DC]$ op de rechte BC volgens de richting $AF \parallel DG$. Wat kan je besluiten uit de stelling van Thales? Merk op dat $[AD]$ en $[DC]$ twee even lange en evenwijdige lijnstukken zijn.
- Vul aan:
 $|GC| = |FG|$ en $|FG| = ... |BF|$
- We besluiten:
 $|BC| = |BG| + |GC| = ... |BF| + ... |BF| = ... |BF| \Rightarrow \frac{|BF|}{|BC|} = ...$

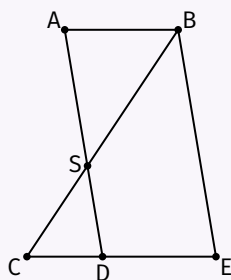


- | | |
|--|--|
| a) $ AD = DC $ | d) $\frac{ FG }{ AD } = \frac{ GC }{ DC }$ |
| b) $\frac{ BF }{ BE } = \frac{ BG }{ BD }$ | $ FG = GC $ |
| c) $ BG = 3 BF $ | e) $ FG = 2 BF $ |
| | f) $ BC = BG + GC = 3 BF + 2 BF = 5 BF \Rightarrow \frac{ BF }{ BC } = \frac{1}{5}$ |



52

In de figuur is $AB \parallel CE$ en $AD \parallel BE$. Verder weet je dat $\frac{|AS|}{|SD|} = r$.
Toon met behulp van de stelling van Thales aan dat $\frac{|CD|}{|DE|} = \frac{1}{r}$.



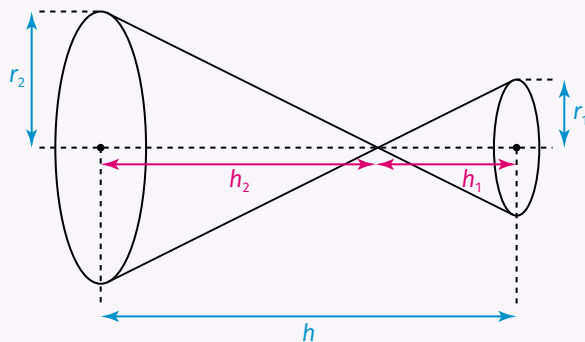
TIP Pas de stelling van Thales tweemaal toe.

- | | |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> $p_{BC}^{AB}([AS]) = [BS]$ en $p_{BC}^{AB}([SD]) = [SC]$ | <ul style="list-style-type: none"> $p_{CE}^{SD}([SC]) = [DC]$ en $p_{CE}^{SD}([SB]) = [DE]$ |
| $\frac{ AS }{ BS } = \frac{ SD }{ SC }$ | $\frac{ SC }{ DC } = \frac{ SB }{ DE }$ |
| $\frac{ AS }{ SD } = \frac{ BS }{ SC }$ (middelste termen van plaats wisselen) | $\frac{ SC }{ SB } = \frac{ DC }{ DE }$ (middelste termen van plaats wisselen) |
| $r = \frac{ BS }{ SC }$ (gegeven) (1) | $\frac{1}{r} = \frac{ DC }{ DE }$ (uit (1)) |



53

In de figuur is een dubbele omwentelingskegel (vb. een zandloper) voorgesteld.
Bepaal de inhoud van deze kegel.



- a) $\frac{h}{3}\pi(r_1^2 + r_2^2)$
- b) $\frac{h}{3}\pi(r_2^2 + r_2r_1 + r_1^2)$
- c) $\frac{h}{3}\pi(r_2^2 - r_1r_2 + r_1^2)$**
- d) $\frac{h}{3}\pi(r_2 + r_1)^2$
- e) $\frac{h}{3}\pi(r_2 - r_1)^2$

© VWO 1996-1997 tweede ronde

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{h_1}{h_2}$$

$$r_1 h_2 = r_2 h_1$$

$$h_2 = \frac{r_2}{r_1} \cdot h_1$$

$$h_2 = \frac{r_2}{r_1} (h - h_2)$$

$$h_2 = \frac{r_2}{r_1} h - \frac{r_2}{r_1} h_2$$

$$\left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right) h_2 = \frac{r_2}{r_1} h$$

$$\left(\frac{r_1 + r_2}{r_1}\right) h_2 = \frac{r_2}{r_1} h$$

$$(r_1 + r_2) h_2 = r_2 h \quad (1)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r_1^2 \cdot h_1 + \frac{1}{3}\pi \cdot r_2^2 \cdot h_2$$

$$= \frac{1}{3}\pi(r_1^2 \cdot h_1 + r_2^2 \cdot h_2)$$

$$= \frac{1}{3}\pi[r_1^2(h - h_2) + r_2^2 h_2]$$

$$= \frac{1}{3}\pi(r_1^2 h - r_1^2 h_2 + r_2^2 h_2)$$

$$= \frac{1}{3}\pi[r_1^2 h + (r_2^2 - r_1^2) h_2]$$

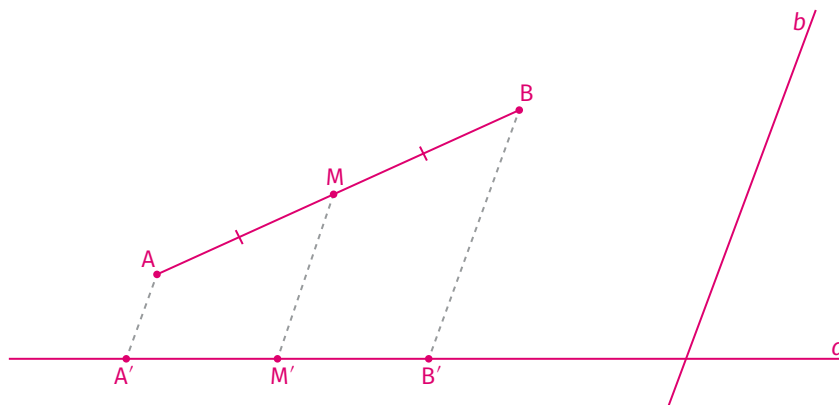
$$= \frac{1}{3}\pi[r_1^2 h + (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) h_2]$$

$$= \frac{1}{3}\pi[r_1^2 h + (r_2 - r_1) r_2 h] \quad (1)$$

$$= \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 - r_1 r_2)$$



Een projectie bewaart het midden van een lijnstuk. Dit betekent dat het midden van het lijnstuk $[AB]$ wordt afgebeeld op het midden van het lijnstuk $[A'B']$.
Verklaar dit aan de hand van de stelling van Thales.



Gegeven: $p_a^b([AB]) = [A'B']$
 $|AM| = |MB|$

Te bewijzen: $|A'M'| = |M'B'|$

Bewijs: $p_a^b([AB]) = [A'B']$ (gegeven)

$\Downarrow$
 $AA' \parallel MM' \parallel BB'$ (constructie projectie)

$\Downarrow$
 $\frac{|AM|}{|A'M'|} = \frac{|MB|}{|M'B'|} = \frac{|AB|}{|A'B'|}$ (Thales)

$\Downarrow$
 $\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|A'M'|}{|M'B'|}$ (middelste termen wisselen van plaats)

$\Downarrow$
 $1 = \frac{|A'M'|}{|M'B'|}$ (gegeven)

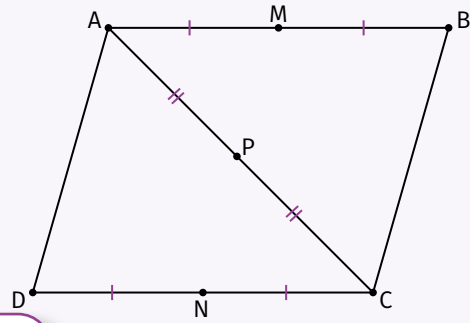
$\Downarrow$
 $|M'B'| = |A'M'|$



55

Gegeven: parallellogram ABCD
 M is het midden van [AB]
 N is het midden van [CD]
 P is het midden van [AC]

Te bewijzen: a) $|MP| = |NP|$
 b) M, N en P zijn collineair



- TIP**
- Projecteer twee even lange lijnstukken op de rechte MN volgens de richting van AB.
 - Drie punten zijn collineair als ze eenzelfde beeld na projectie hebben.

Bewijs:

a) $p_{MN}^{AC}([AM]) = [PM]$ en $p_{MN}^{AC}([NC]) = [NP]$

$$\Downarrow \quad \text{(Thales)}$$

$$\frac{|AM|}{|PM|} = \frac{|NC|}{|NP|}$$

$$\Downarrow \quad \text{(middelste termen wisselen van plaats)}$$

$$\frac{|AM|}{|NC|} = \frac{|PM|}{|NP|}$$

$$\Downarrow \quad (|AM| = |NC|)$$

$$1 = \frac{|PM|}{|NP|}$$

$$\Downarrow$$

$$|NP| = |PM|$$

b) $p_{DC}^{AD}(M) = N$

$$p_{DC}^{AD}(P) = N$$

$$p_{DC}^{AD}(N) = N$$

Besluit: M, P en N zijn collineair.



56

In $\triangle ABC$ trek je door het midden van $[AB]$ een evenwijdige aan $[BC]$. Bewijs dat deze rechte door het midden van $[AC]$ gaat. Maak een tekening en noteer het gegeven en hetgeen te bewijzen valt. (Dit is de omgekeerde stelling van de middenparallel in een driehoek. De gewone stelling vind je terug in de modules 'vectoren' en 'meetkundige toepassingen'.)



TIP Projecteer twee even lange lijnstukken die in elkaars verlengde liggen en pas de stelling van Thales toe.

Gegeven: $\triangle ABC$

$$|AM| = |MB|$$

$$MN \parallel BC$$

Te bewijzen: $|AN| = |NC|$

Bewijs: $MN \parallel BC$

$\Downarrow$ (Thales)

$$\frac{|AM|}{|AN|} = \frac{|MB|}{|NC|}$$

$\Downarrow$ (middelste termen wisselen van plaats)

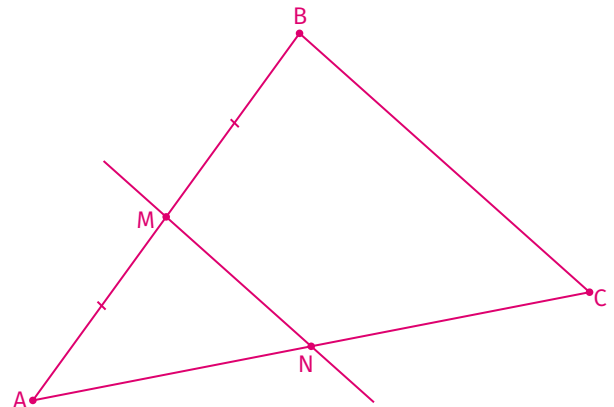
$$\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|AN|}{|NC|}$$

$\Downarrow$ ($|AM| = |MB|$)

$$1 = \frac{|AN|}{|NC|}$$

$\Downarrow$

$$|NC| = |AN|$$



Door een willekeurig punt van de zijde $[BC]$ van $\triangle ABC$ trekt men een rechte die evenwijdig is met de zwaartelijns uit A. Deze rechte snijdt AB in E en AC in F.

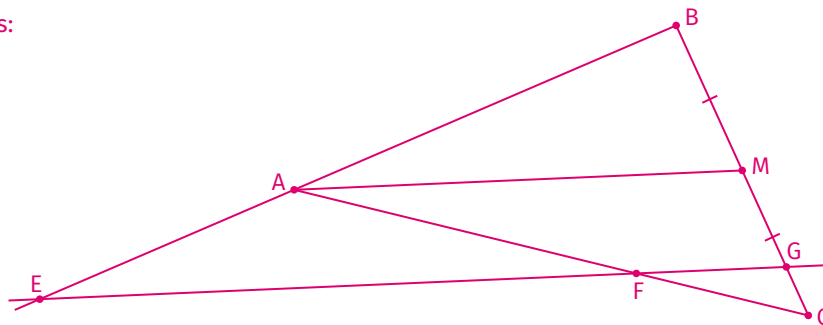
Te bewijzen: $|AF| \cdot |AB| = |AE| \cdot |AC|$

Bewijs:

- Maak een tekening van de situatie en benoem de punten.
M is het midden van $[BC]$.
G is het willekeurig punt op $[BC]$.
- Welke rechten zijn evenwijdig? Dit wordt de projectierichting.
- Projecteer de vier lijnstukken waarvan de lengtes bij 'te bewijzen' staan.
- Pas de stelling van Thales tweemaal toe. Zo krijg je twee evenredigheden waarmee je verder kan rekenen.

Bewijs:

a)



b) $AM \parallel EG$

c) $p_{BC}^{AM}([AF]) = [MG]$

$$p_{BC}^{AM}([AB]) = [MB]$$

$$p_{BC}^{AM}([AE]) = [MG]$$

$$p_{BC}^{AM}([AC]) = [MC]$$

d) We passen de stelling van Thales 2 keer toe

$$\frac{|AB|}{|BM|} = \frac{|AE|}{|MG|} \quad \text{en} \quad \frac{|AF|}{|MG|} = \frac{|AC|}{|MC|}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|BM|}{|MG|}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{|MC|}{|MG|} = \frac{|AC|}{|AF|}$$

$$\Downarrow (|BM| = |MC|)$$

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|AC|}{|AF|}$$

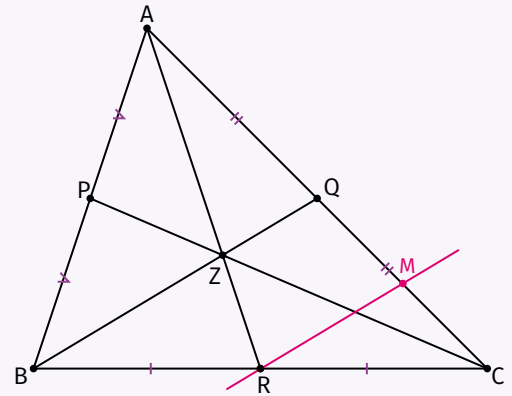
$$\Downarrow (\text{hoofdeigenschap evenredigheden})$$

$$|AB| \cdot |AF| = |AC| \cdot |AE|$$



Het zwaartepunt verdeelt een zwaartelijijn in twee stukken waarvan het ene stuk twee keer langer is dan het andere. Het langste lijnstuk ligt tussen het hoekpunt en het zwaartepunt. Het kortste lijnstuk ligt tussen het zwaartepunt en het midden van de onverstaande zijde. (Deze stelling hebben we al bewezen in de module over vectoren. Je kan de stelling echter ook bewijzen met de stelling van Thales.)

Bewijs dat $|AZ| = 2 |ZR|$ met behulp van de stelling van Thales.



- Teken een rechte door R evenwijdig aan [BQ].
- Toon met de stelling van Thales aan dat deze rechte door het midden van [QC] loopt. Noem dit midden M.
- Bepaal de verhouding van $|MQ|$ tot $|AQ|$.
- Pas de stelling van Thales nogmaals toe.

a) zie tekening

b) Te bewijzen: $|QM| = |MC|$

Bewijs: $BQ \parallel RM$

$$\begin{aligned}
 &\Downarrow \quad (\text{Thales}) \\
 &\frac{|BR|}{|QM|} = \frac{|RC|}{|MC|} \\
 &\Downarrow \quad (\text{middelste termen wisselen van plaats}) \\
 &\frac{|BR|}{|RC|} = \frac{|QM|}{|MC|} \\
 &\Downarrow \\
 &1 = \frac{|QM|}{|MC|} \\
 &\Downarrow \\
 &|QM| = |MC|
 \end{aligned}$$

c) $\frac{|MQ|}{|AQ|} = \frac{1}{2}$

d) $\frac{|AZ|}{|AQ|} = \frac{|ZR|}{|QM|}$

$$\begin{aligned}
 &\Downarrow \\
 &|AZ| = \frac{|AQ| \cdot |ZR|}{|QM|} \\
 &\Downarrow \\
 &|AZ| = \frac{2 \cdot |QM| \cdot |ZR|}{|QM|} \\
 &\Downarrow \\
 &|AZ| = 2 \cdot |ZR|
 \end{aligned}$$

Analoog kun je bewijzen dat $|ZC| = 2 \cdot |PZ|$ en $|BZ| = 2 \cdot |QZ|$



stelling Een bissectrice vanuit een hoekpunt in een driehoek verdeelt de overstaande zijde in twee stukken waarvan de lengtes evenredig zijn met de aanliggende zijden.

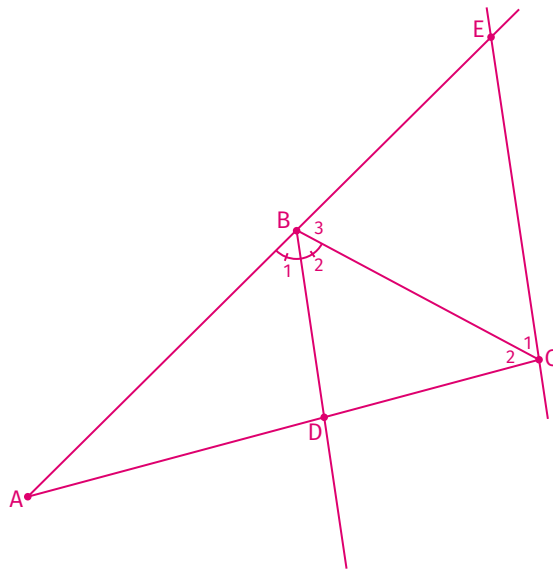
Gegeven: $\triangle ABC$
 BD is een bissectrice

Te bewijzen: $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|BC|}$ en $|BE| = |BC|$

Bewijs:

- Maak een tekening en teken een rechte door C evenwijdig aan BD . Het snijpunt van deze rechte AB noem je E .
- Pas de stelling van Thales toe.
- Toon aan dat $\triangle BCE$ een gelijkbenige driehoek is.

a)



$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{|AB|}{|AD|} &= \frac{|BE|}{|DC|} \\ &\Downarrow \\ \frac{|DC|}{|BE|} &= \frac{|AD|}{|AB|} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{B_1} &= \widehat{E} && \text{(overeenkomstige hoeken)} \\ \widehat{B_2} &= \widehat{C_1} && \text{(verwisselende binnenhoeken)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle BCE \text{ is gelijkbenig}$$

$$\Downarrow$$

$$|BE| = |BC|$$



De stelling van Thales kan je gebruiken om de gelijkvormigheidskenmerken te bewijzen zoals in het voorbeeld hieronder.

Voorbeeld

kenmerk

HH

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als twee hoeken van de eerste driehoek even groot zijn als twee hoeken van de tweede driehoek.

Gegeven: $\triangle ABC$ en $\triangle ADE$

$$\hat{D} = \hat{B}$$

$$\hat{A} = \hat{A}$$

Te bewijzen: $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

Bewijs:

- $\hat{D} = \hat{B}$

$\Downarrow$ (overeenkomstige hoeken)

$$DE \parallel BC$$

$\Downarrow$ (overeenkomstige hoeken)

$$\hat{E} = \hat{C}$$

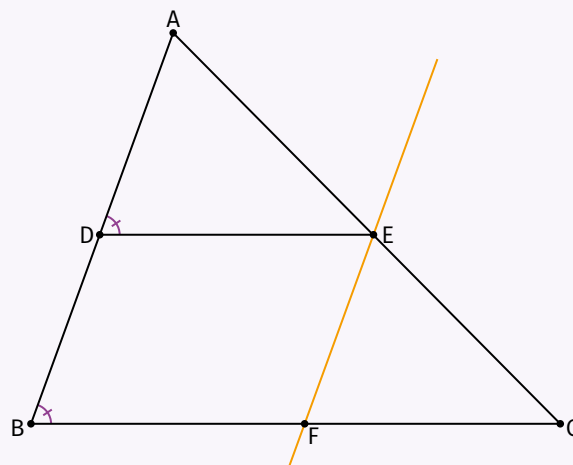
- $DE \parallel BC$

$\Downarrow$ (Thales)

$$\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|EC|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|AB|}$$

$\Downarrow$ (middelste termen van plaats wisselen)

$$\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|AB|}$$



- Teken $FE \parallel AB$

$\Downarrow$ (Thales)

$$\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|BF|}{|FC|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

$\Downarrow$ (def. parallellogram)

$$\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|DE|}{|FC|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

$\Downarrow$ (middelste termen van plaats wisselen)

$$\frac{|AE|}{|DE|} = \frac{|EC|}{|FC|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

$\Downarrow$ (middelste termen van plaats wisselen)

$$\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|BC|}$$

Besluit

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}; \hat{D} = \hat{B}; \hat{E} = \hat{C} \\ \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|BC|} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE$$

Bewijs nu zelf de twee andere gelijkvormigheidskenmerken.

kenmerk

$$\begin{array}{c} \overline{Z} \overline{H} \overline{Z} \\ \overline{Z} \overline{H} \overline{Z} \end{array}$$

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als twee paar zijden een evenredigheid vormen en zij een even grote ingesloten hoek hebben.

en

kenmerk

$$\begin{array}{c} \overline{Z} \overline{Z} \overline{Z} \\ \overline{Z} \overline{Z} \overline{Z} \end{array}$$

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als alle overeenkomstige zijden evenredig zijn.

$$\begin{array}{c} \overline{Z} \overline{H} \overline{Z} \\ \overline{Z} \overline{H} \overline{Z} \end{array}$$

Gegeven: $\triangle ACD$ en $\triangle ABE$

$$\hat{A} = \hat{A}$$

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AE|}{|AD|}$$

Te bewijzen: $\triangle ACD \sim \triangle ABE$

Bewijs:

$$\bullet \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AE|}{|AD|}$$

$\Downarrow$ (middelste termen wisselen van plaats)

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|AC|}{|AD|}$$

$\Downarrow$ (Thales)

$$EB \parallel DC$$

$\Downarrow$ (overeenkomstige hoeken)

$$\hat{E} = \hat{D}$$

en

$$\hat{B} = \hat{C}$$

• Teken $BF \parallel AD$

$\Downarrow$ (Thales)

$$\frac{|AB|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|FC|} = \frac{|AC|}{|DC|}$$

$\Downarrow$ (def. parallellogram)

$$\frac{|AB|}{|EB|} = \frac{|BC|}{|FC|} = \frac{|AC|}{|DC|}$$

$\Downarrow$ (middelste termen van plaats wisselen)

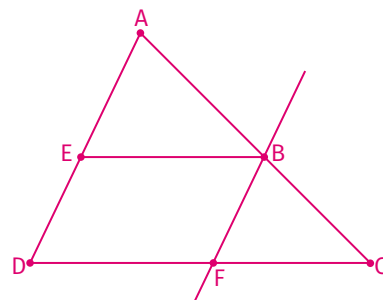
$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|EB|}{|DC|}$$

$\Downarrow$ (gegeven)

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|EB|}{|DC|} = \frac{|AE|}{|AD|}$$

• Besluit

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}; \hat{E} = \hat{D}; \hat{B} = \hat{C} \\ \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|EB|}{|DC|} = \frac{|AE|}{|AD|} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle ABE$$



$\frac{Z}{Z} \frac{Z}{Z}$

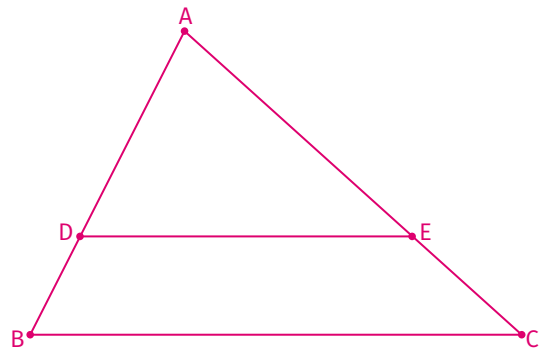
Gegeven: $\triangle ABC$ en $\triangle ADE$

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|DE|}$$

Te bewijzen: $\triangle ABC \sim \triangle ADE$

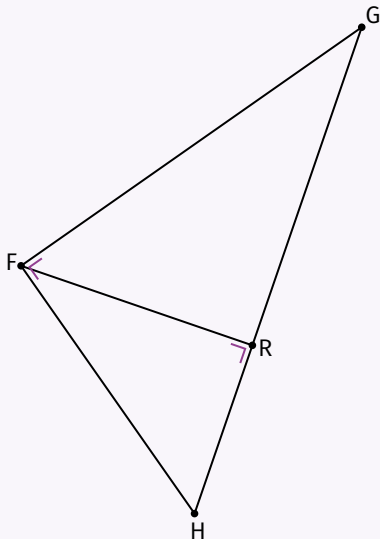
Bewijs:

- $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|}$
 $\Downarrow$ (uiterste termen wisselen)
 $\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AB|}$
 $\Downarrow$ (Thales)
 $DE \parallel BC$
 $\Downarrow$ (overeenkomstige hoeken)
 $\hat{D} = \hat{B}$ en $\hat{E} = \hat{C}$
- $\hat{A} = \hat{A}$
- Besluit
 $\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}; \hat{D} = \hat{B}; \hat{E} = \hat{C} \\ \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|DE|} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE$



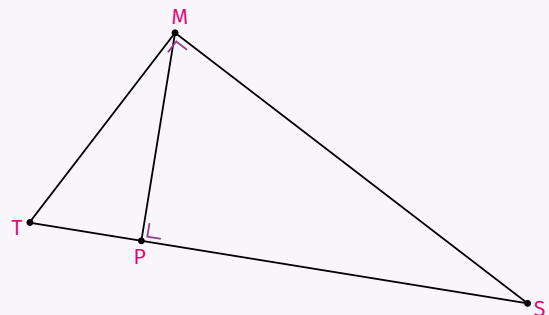
61

a) Noteer de metrische betrekkingen in symbolen.



b) Plaats de juiste letters op de tekening.

$$|MP|^2 = |TP| \cdot |PS|$$

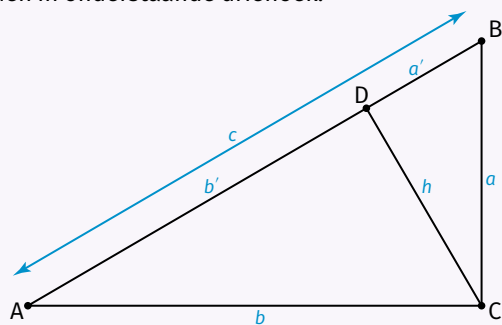


$$\begin{aligned} \text{a) } |FR|^2 &= |HR| \cdot |RG| \\ |FH|^2 &= |HG| \cdot |HR| \\ |FG|^2 &= |HG| \cdot |RG| \end{aligned}$$



62

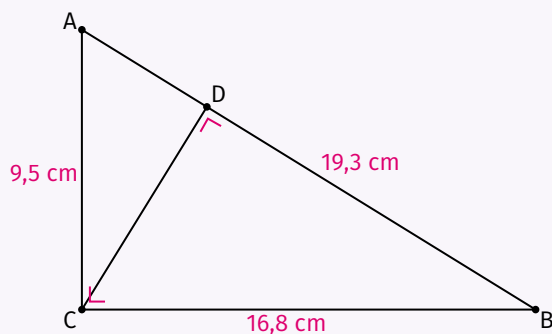
Duid alle formules aan die gelden in onderstaande driehoek.



$h^2 = a' \cdot b$	$c = a' + b'$	$c^2 = a' \cdot c$	$h = \sqrt{a' \cdot b'}$
$b^2 = b' \cdot c$	$h^2 = a' \cdot b'$	$h^2 = a' \cdot a$	$b = \sqrt{a' \cdot b'}$
$a' = \frac{h^2}{b'}$	$a' = \frac{h^2}{c}$	$b' = \frac{b^2}{c}$	$c = \frac{a^2}{a'}$

63

In een rechthoekige driehoek ABC wordt de hoogtelijn CD op de schuine zijde getekend. De zijden van de driehoek meten 9,5 cm; 16,8 cm en 19,3 cm. Hoe lang is de hoogtelijn CD? Vermeld duidelijk je werkwijze.



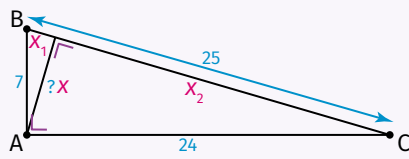
- $9,5^2 = |AD| \cdot 19,3$
 $\frac{9,5^2}{19,3} = |AD|$
 $4,68 \approx |AD|$
- $16,8^2 = |BD| \cdot 19,3$
 $\frac{16,8^2}{19,3} = |BD|$
 $14,62 \approx |BD|$
- $|CD|^2 = |AD| \cdot |BD|$
 $|CD| = \sqrt{|AD| \cdot |BD|}$
 $|CD| \approx 8,27$

Antwoord: De hoogtelijn CD is ongeveer 8,27 cm lang.

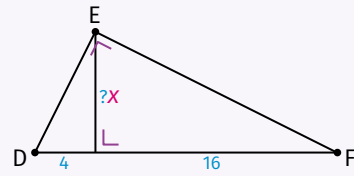
64

Bepaal de gevraagde lengtes.

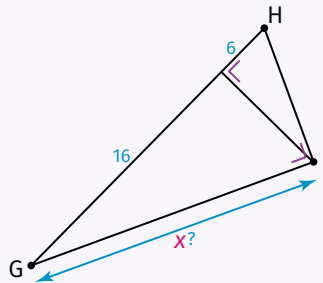
a)



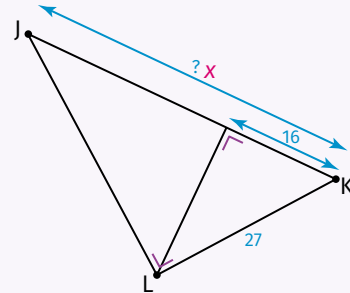
c)



b)



d)



$$\begin{aligned} a) \bullet \quad 7^2 &= 25 \cdot x_1 \\ \frac{7^2}{25} &= x_1 \\ \frac{49}{25} &= x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad 24^2 &= 25 \cdot x_2 \\ \frac{24^2}{25} &= x_2 \\ 23,04 &= x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad x^2 &= \frac{49}{25} \cdot 23,04 \\ x^2 &= 45,1584 \\ x &= 6,72 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad x^2 &= 16 \cdot 22 \\ x^2 &= 352 \\ x &\approx 18,76 \end{aligned}$$

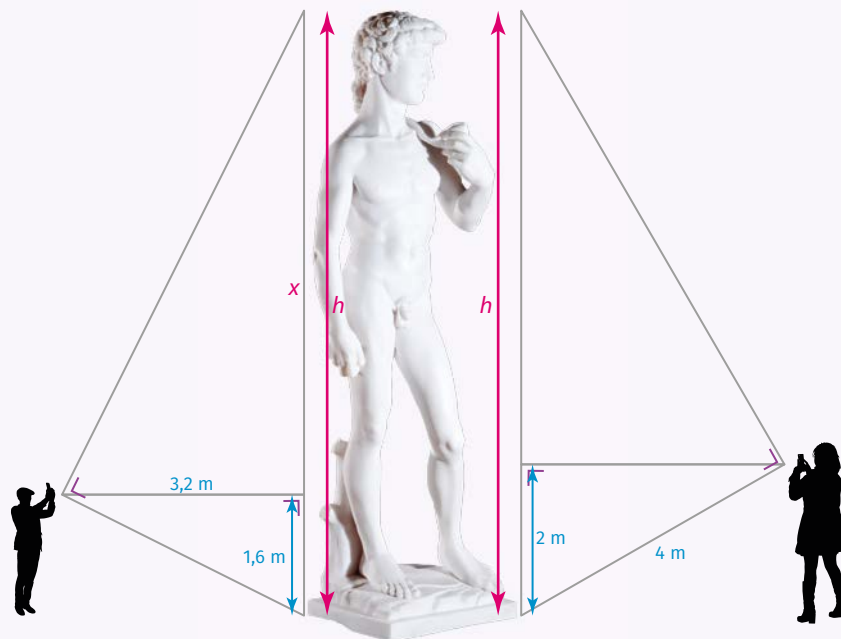
$$\begin{aligned} c) \quad x^2 &= 4 \cdot 16 \\ x^2 &= 64 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \quad 27^2 &= 16 \cdot x \\ \frac{27^2}{16} &= x \\ 45,5625 &= x \\ 45,56 &\approx x \end{aligned}$$



65

In een park staat een groot monument. Silke en Steven maken allebei een foto van dit monument. Bepaal de hoogte van dit monument op basis van de figuur.



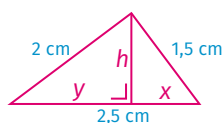
$$\begin{aligned}
 4^2 &= 2 \cdot h & \text{OF} & & 3,2^2 &= 1,6 \cdot x \\
 \frac{4^2}{2} &= h & & & \frac{3,2^2}{1,6} &= x \\
 8 &= h & & & 6,4 &= x \\
 & & & & \Rightarrow h &= 6,4 + 1,6 \\
 & & & & h &= 8
 \end{aligned}$$

Antwoord: Het monument is 8 m hoog.



66

In een rechthoekige driehoek zijn de zijden respectievelijk 2,5 cm, 1,5 cm en 2 cm lang. Teken in deze driehoek de hoogte op de schuine zijde. De rechthoekige driehoek wordt verdeeld in twee kleine rechthoekige driehoeken. Bepaal de oppervlakte van elke driehoek.

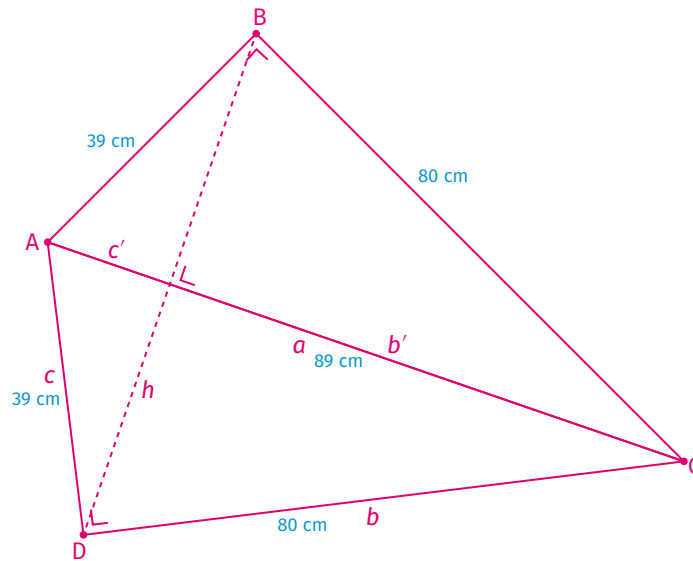


$$\begin{aligned}
 & \bullet \quad 1,5^2 = 2,5 \cdot x & \bullet \quad 2^2 &= 2,5 \cdot y & \bullet \quad h^2 &= 0,9 \cdot 1,6 \\
 & \frac{1,5^2}{2,5} = x & \frac{2^2}{2,5} = y & h^2 &= 1,44 \\
 & 0,9 = x & 1,6 = y & h &= 1,2 \\
 & \bullet \quad \text{Opp. } \Delta_1 = \frac{0,9 \cdot 1,2}{2} & & & & \\
 & & & & & = 0,54 \\
 & \bullet \quad \text{Opp. } \Delta_2 = \frac{1,6 \cdot 1,2}{2} & & & & \\
 & & & & & = 0,96
 \end{aligned}$$

Antwoord: De oppervlaktes van de driehoeken zijn $0,54 \text{ cm}^2$ en $0,96 \text{ cm}^2$.



In een vlieger ABCD zijn $\hat{B}$ en $\hat{D}$ rechte hoeken. De kortste zijden van deze vlieger meten 39 cm, de langste zijden meten 80 cm. De langste diagonaal meet 89 cm. Bereken de lengte van de kortste diagonaal.



- $c^2 = a \cdot c'$ $b^2 = b' \cdot a$
 $39^2 = 89 \cdot c'$ $80^2 = b' \cdot 89$
 $\frac{39^2}{89} = c'$ $\frac{80^2}{89} = b'$
- $h^2 = \frac{80^2}{89} \cdot \frac{39^2}{89}$
 $h^2 \approx 1228,94$
 $h \approx 35,06$
- Kortste diagonaal: $2 \cdot 35,06 \text{ cm} = 70,12 \text{ cm}$

Antwoord: De kortste diagonaal is ongeveer 70,12 cm.

